



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

Caracterización de Yacimientos Usando el Método de Conjuntos de Nivel

Autor:

Rossmaty Villegas Velásquez

Director:

Oliver Dorn

DEPARTAMENTO DE CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES E
INGENIERÍA QUÍMICA

Grupo de Simulación, Modelización Numérica y Matemática
Industrial

Leganés, Julio de 2007

TESIS DOCTORAL

Caracterización de Yacimientos Usando el Método de Conjuntos de Nivel

Autor: Rossmary Villegas Velásquez

Director: Oliver Dorn

Firma del Tribunal Calificador:

(Nombre y apellidos)

Firma

Presidente:		
Vocal:		
Vocal:		
Vocal:		
Secretario:		

Calificación:

Leganes, de de 2007

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Proceso de inyección de agua en yacimientos de petróleo . . .	11
1.2. Modelo numérico del yacimiento. Problema directo	12
1.3. Métodos de simulación numérica	18
1.4. Caracterización de yacimientos utilizando información estática	20
1.4.1. Caracterización de yacimientos con ajuste histórico de producción	21
1.4.2. Yacimientos con perfiles de permeabilidad suaves . . .	23
1.4.3. Yacimientos con discontinuidad en la permeabilidad . .	25
1.5. Método de conjuntos de nivel y problemas inversos	28
1.6. Deformación de las formas a partir del cálculo de variaciones .	30
1.6.1. Cambio del parámetro K debido a las deformaciones de la forma	31
1.7. Datos de los modelos de simulación	33
2. Reconstrucción de Formas	34
2.1. Derivación teórica del algoritmo de evolución de formas	37
2.2. El algoritmo de reconstrucción de formas usando la técnica de conjunto de nivel	41
2.3. Ejemplos Numéricos de reconstrucción de formas	43
2.3.1. Reconstrucción de formas. Primer ejemplo	43
2.3.2. Reconstrucciones de formas. Segundo ejemplo	48
2.4. Inicialización geoestadística gaussiana	51
2.4.1. Simulación gaussiana secuencial para generar inicial- izaciones	52
2.4.2. Experimentos numéricos y discusión	54
2.5. Publicaciones y presentaciones	56

3. Reconstrucción de formas y valores	60
3.1. Reconstrucción de valores de permeabilidad y forma.	61
3.1.1. Formulación matemática	65
3.1.2. Algoritmo	66
3.1.3. Ejemplos numéricos	67
3.2. Estimación simultánea de forma y perfil parametrizado	75
3.2.1. Perfiles lineales ó constantes	79
3.2.2. Ejemplos numéricos	82
3.3. Reconstrucción de formas y valores. Casos híbridos	84
3.3.1. Primera estrategia	86
3.3.2. Segunda estrategia	90
3.4. Publicaciones y presentaciones	92
4. Perturbaciones topológicas	95
4.1. Manejo de zonas de baja sensibilidad	95
4.1.1. Perfil de sensibilidad usando la técnica adjunta	98
4.2. Perturbaciones topológicas	100
4.2.1. Algoritmo	102
4.2.2. Ejemplos numéricos	104
4.3. Reconstrucción de canales	118
4.4. Publicaciones y presentaciones	122
5. Yacimientos con más de dos litofacies	127
5.1. Varias funciones de conjunto de nivel	128
5.2. Resultados	131
5.2.1. Evolución de formas	132
5.2.2. Evolución de formas y corrección de valores en zonas críticas	133
5.2.3. Evolución de formas y corrección de valores en zonas críticas con regularización adicional	136
5.2.4. Evolución de formas con diferentes inicializaciones . . .	136
5.2.5. Evolución de formas y corrección de zonas críticas us- ando inicializaciones geoestadísticas	138
5.3. Publicaciones y presentaciones	141
6. Conclusiones	144
7. Publicaciones y presentaciones	148

8. APÉNDICES	152
APÉNDICE 1. Métodos de Simulación	152
APÉNDICE 2. La técnica del operador adjunto para calcular sen- sibilidades	161
APÉNDICE 3. Método de Conjuntos de Nivel	164
APÉNDICE 4. Estrategias de regularización para la inversión de formas	178

Índice de figuras

1.1. Izq.:El frente original en el plano xy Der.: Función conjunto de nivel.	29
1.2. Deformación de las formas calculando pequeñas varaciones. . .	32
2.1. Reconstrucción de Formas, primer ejemplo, primera inicialización	44
2.2. Evolución de formas, primer ejemplo, primera inicialización . .	45
2.3. Reconstrucción de formas, primer ejemplo, segunda inicialización	46
2.4. Evolución de formas, primer ejemplo, segunda inicialización . .	47
2.5. Reconstrucción de formas, segundo ejemplo	49
2.6. Evolución de formas, segundo ejemplo	50
2.7. Realizaciones estocásticas, funcional de coste	55
2.8. Reconstrucciones usando las 5 primeras inicializaciones estocásticas	57
2.9. Reconstrucciones usando las inicializaciones estocásticas 6-10	58
3.1. Reconstrucción de formas y valores. Permeabilidad real o de referencia para los 3 experimentos	68
3.2. Reconstrucción de formas y valores. Secciones transversales distribución de permeabilidad real o de referencia	69
3.3. Reconstrucción de formas y valores. Primer ejemplo numérico, reconstrucción tradicional basada en el modelo adjunto en cada celda	70
3.4. Reconstrucción de formas y valores. Primer ejemplo. Evolución de los valores promedios de permeabilidad durante la primera etapa	71
3.5. Reconstrucción de formas y valores, segundo ejemplo numérico, evolución de la permeabilidad durante la primera etapa . .	72

3.6. Reconstrucción de formas y valores. Segundo ejemplo numérico, segunda etapa	73
3.7. Evolución de formas y valores. Segundo ejemplo numérico, segunda etapa	74
3.8. Reconstrucción de formas y valores promedios.	81
3.9. Formas geológicas y parametrización de la permeabilidad; primera etapa	83
3.10. Formas geológicas y parametrización de la permeabilidad; segunda etapa, evolución de parámetros	85
3.11. Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa I	87
3.12. Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa II	88
3.13. Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa III	88
3.14. Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa IV	89
3.15. Caso híbrido. Segunda estrategia. Perturbación simultánea	91
4.1. Introduciendo un nuevo objeto. Esquemas de las secciones transversales de una función conjunto de nivel	101
4.2. Permeabilidad Real(Izquierda: caso 1, Derecha: caso 2). Perfil de sensibilidad del yacimiento	104
4.3. Caso 1 usando la función de banda	105
4.4. Caso 1 Sin usar la función de bandas (narrowband)	106
4.5. Evolución de las formas para el caso 1 sin usar la función de banda(narrowband)	108
4.6. Caso 2, reconstrucción usando la función de banda.	109
4.7. Caso 2, reconstrucción Sin usar la función de banda	111
4.8. Caso 2 usando una función de banda y perturbaciones topológicas	112
4.9. Localizaciones donde se añaden los nuevos objetos en el esquema de perturbaciones topológicas	113
4.10. Evolución de formas para el caso 2 usando la función de banda y aplicando perturbaciones topológicas	114
4.11. Reconstrucción introduciendo los 12 nuevos objetos en las zonas de baja sensibilidad de la inicialización	115
4.12. Formas y valor promedio añadiendo objetos.	117
4.13. Canales. Primer ejemplo numérico, Formas y valor promedio, primera etapa.	119
4.14. Canales. Primer ejemplo numérico, Formas y valor promedio, segunda etapa, primera estrategia	120

4.15. Canales. Primer ejemplo numérico, Formas y valor promedio, segunda etapa, segunda estrategia	121
4.16. Canales. Segundo ejemplo numérico, Formas y valor promedio, primera estrategia, primera etapa.	123
4.17. Canales. Segundo ejemplo numérico, Formas y valor promedio, primera estrategia, segunda etapa	124
4.18. Canales. Segundo ejemplo numérico, Formas y valor promedio, segunda estrategia.	125
5.1. Más de dos litofacies. Primera estrategia, con zonas críticas . .	134
5.2. Más de dos litofacies. Segunda estrategia, corrección de zonas críticas.	135
5.3. Más de dos litofacies. Tercera estrategia, corrección de zonas críticas y regularización	137
5.4. Más de dos litofacies. Primera estrategia, Etapa I.	139
5.5. Más de dos litofacies. Inicialización geoestadística.	140
5.6. Más de dos litofacies. Inicializaciones geoestadísticas 1 hasta 5.	142
5.7. Más de dos litofacies. Inicializaciones geoestadísticas 6 hasta 10.	143
8.1. Creando un agujero B_ρ dentro de la forma D	169
8.2. Cambios topológicos	172
8.3. Representación de múltiples formas usando la función conjun- to de nivel por etapa.	176

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día la optimización de la explotación de los yacimientos de hidrocarburo juega un papel importante en la economía mundial. Por esta razón, al identificarse la presencia de un yacimiento ó una acumulación de hidrocarburo cuya explotación es económicamente rentable, se genera un plan de explotación con el objetivo de maximizar el factor de recobro de los yacimientos ¹. Para optimizar el proceso de producción de hidrocarburos en los campos de petróleo, es necesario caracterizar correctamente el yacimiento [9], lo que involucra entender la estructura geológica del subsuelo y sus propiedades físicas, tal que, este conocimiento pueda ser incorporado en los modelos de simulación del yacimiento en los que se fundamentan las estrategias de explotación de los campos. Normalmente la información previa en un proyecto de simulación de yacimientos está basada en resultados de los datos sísmicos, las medidas electromagnéticas y los registros en los pozos, entre otros [20, 74, 81]. Los registros son medidas tomadas a lo largo de la profundidad del pozo y proveen una fuente de información en las cercanías de los pozos, tal como propiedades físicas de las rocas y tipos de fluidos [94]. La información previa disponible no permite la completa caracterización del yacimiento para obtener un modelo estático que satisfaga los datos de producción al momento de realizar la simulación numérica. Por lo tanto en el proceso de ajuste histórico de producción se modifican los parámetros físicos del yacimiento para que los resultados del modelo de simulación se aproximen a los datos de presión-producción reales o de referencia [1, 60, 16]. Este proceso representa la solución de un problema inverso donde los datos son las historias de presión

¹El factor de recobro: es proporción del petróleo cuya extracción del yacimiento es económicamente rentable

y producción en los pozos y las incógnitas vienen dadas por las propiedades físicas del yacimiento (por ejemplo, la permeabilidad, K que representa la conectividad existente entre los poros de las rocas presentes en el subsuelo y/o la porosidad ϕ que representa la relación entre el volumen poroso, y el volumen total del yacimiento).

En aplicaciones reales existen yacimientos con contraste en las propiedades físicas de las litofacies (tipos de rocas) presentes. Por ejemplo en yacimientos fracturados las fracturas se extienden solo en cierta parte del yacimiento por lo que es muy importante identificar la distribución de las zonas fracturadas [98, 102, 111, 112], ya que son las zonas con mayor potencial de producción. Otro caso son los yacimientos asociados a diferentes litologías donde cada litología puede corresponder a diferentes tiempos geológicos de deposición. Por ello optimizar la modelización de estos yacimientos complejos ha sido la principal motivación de nuestro grupo de simulación. La metodología desarrollada en este trabajo es aplicable en yacimientos con varias litologías bien diferenciadas, donde existe contraste de permeabilidad entre las litofacies. El método de reconstrucción de formas y de caracterización usa el método de inversión basado en el modelo adjunto [10, 50, 101, 67, 30, 38, 54] y el método de conjunto de nivel, todo esto combinado con análisis de yacimiento [20, 81, 122] y simulación numérica. Así, este trabajo presenta un nuevo método para la caracterización y reconstrucción de formas geológicas en el proceso de ajuste histórico automático en yacimientos con más de un tipo de roca.

Los modelos de yacimientos estudiados en esta tesis, consisten de varias regiones con propiedades físicas diferentes en cada material. La distribución de cada material en el yacimiento es modelada usando el método de conjuntos de nivel [7, 21, 25, 43, 56, 62, 120, 127].

Con la finalidad de describir adecuadamente las formas litológicas se realiza una descripción de la permeabilidad en superficies cerradas, usando la función de conjunto de nivel. El proceso de optimización del ajuste histórico requiere la resolución del método IMPES (Implícito en presión, explícito en saturación, ver apéndice 1) para resolver el problema directo, así como también la solución del problema adjunto ó de retro-propagación para el cálculo de gradientes y la minimización del funcional de coste [74, 97, 31, 5, 113, 121, 133]. Para generar los datos sintéticos, que son los datos reales ó de referencia en los ejemplos numéricos estudiados, se utiliza el simulador de líneas de corrientes [60]. La utilización de simuladores diferentes para generar datos (simulador de líneas de corrientes) y para la reconstrucción (IMPES)

introduce un ruido artificial en los datos evitando el 'crimen asociado al problema inverso' ("inverse crime") [48, 80]. En este trabajo todos los simuladores numéricos utilizados para resolver el problema directo y el inverso han sido desarrollados previamente por el grupo de modelización y simulación numérica de la Universidad Carlos III de Madrid y Repsol YPF, para más detalles ver [60].

El algoritmo que presenta la metodología desarrollada parte de un modelo de permeabilidad inicial (determinístico ó estocástico) basado en información previa del yacimiento, se calculan los residuos definidos como la diferencia entre los datos de producción simulados y los reales. Estos residuos se incorporan en la ecuación de estado adjunto para obtener la dirección de disminución del funcional de coste utilizando un método de gradiente. La corrección del perfil de propiedades y de la geometría asumida se realiza mediante el método de conjuntos de nivel. Así el proceso es repetido iterativamente hasta satisfacer el criterio de convergencia o tolerancia.

En este trabajo se desarrollan varios modelos, para la caracterización y optimización del ajuste histórico de yacimientos con más de un tipo de roca con valores de permeabilidad bien diferenciados usando el método de conjuntos de nivel. La combinación del problema directo, el esquema adjunto y las regularizaciones y filtros aplicados permiten caracterizar yacimientos complejos con más de un tipo de roca, a partir de los datos de producción sin necesidad de usar una herramienta de cálculo más potente que un ordenador regular. También es importante recalcar que los algoritmos de inversión presentados aquí no están restringidos al uso de los códigos empleados para generar estos resultados, también se pueden combinar estos algoritmos de reconstrucción de forma y valor con simuladores comerciales para resolver el problema directo y el adjunto en situaciones de dos y tres dimensiones.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: En este capítulo se presenta una revisión de los conceptos básicos y la formulación matemática asociada a la caracterización de yacimientos con ajuste histórico automático en yacimientos sometidos a un proceso de inyección de agua; además se presentan los trabajos previos a esta tesis relacionados con la definición de geometrías litológicas a partir de la aplicación de modelo inverso para la generación del ajuste histórico de yacimientos junto con una descripción general del método de conjuntos de nivel [48, 125, 47, 46, 70]. El capítulo 2 expone la derivación matemática del algoritmo asociado a la metodología desarrollada en este trabajo para la definición de las geometrías de las litologías usando el método de conjunto de nivel [143], en yacimientos con valores de per-

meabilidad conocidos y constantes. Además se presentan algunos resultados obtenidos al aplicar el algoritmo en varios modelos de yacimientos con inicializaciones determinísticas y estocásticas. En el capítulo 3 se presenta una extensión del algoritmo para ser aplicado a situaciones más realistas para la reconstrucción simultánea de formas y valores de permeabilidad en cada celda [146, 147]. Se muestran los resultados obtenidos a partir de la aplicación del algoritmo para la caracterización de formas y valores internos combinando la técnica convencional de calculo de permeabilidad en cada celda (modelo adjunto), parametrización de la tendencia de permeabilidad y el método de conjunto de nivel. En el capítulo 4 se presenta una nueva metodología para el manejo de zonas de baja sensibilidad aplicando perturbaciones topológicas para reconstruir formas geológicas en zonas de baja sensibilidad en yacimientos [144, 145]. En el capítulo 5 se extiende la metodología del capítulo 2 para la caracterización de yacimientos con más de dos litofacies, mostrando los resultados obtenidos en un modelo de yacimiento a partir de inicializaciones determinísticas y gaussianas [148]. Al final de esta tesis se presentan las conclusiones asociadas al trabajo y los apéndices complementarios.

1.1. Proceso de inyección de agua en yacimientos de petróleo

En un yacimiento sometido a un proceso de producción primario, se utiliza fundamentalmente la energía natural del yacimiento. Durante este proceso el petróleo se encuentra bajo presión dentro de los poros de las rocas que forman el yacimiento. Por ello, cuando se perfora un pozo, el petróleo se expande hacia la zona de menor presión. El petróleo (“black oil”) contiene una cantidad significativa de gas natural en disolución. Cuando el petróleo pasa a la zona de baja presión del pozo, por debajo de “la presión de burbuja”², el gas deja de estar disuelto y empieza a expandirse empujando al petróleo a la zona de menor presión.

A medida que se continúa retirando líquido del yacimiento, la presión disminuye poco a poco. Esto hace que la velocidad de flujo del líquido hacia el pozo se haga menor y se libere menos gas. Cuando el petróleo ya no llega a la superficie se hace necesario instalar un mecanismo de levantamiento

²La presión de burbuja: es la presión en la que se libera la primera cantidad de gas, inicialmente disuelto en el petróleo, en el proceso de producción de un yacimiento

artificial en el pozo para continuar extrayendo el crudo desde el fondo del pozo a la superficie.

Independientemente de si se aplica ó no un método de levantamiento artificial, cuando la producción primaria se acerca a su límite económico, es posible que sólo se haya extraído un pequeño porcentaje del crudo almacenado, que normalmente no supera el 30 % de factor de recobro. Por ello, es necesario aplicar sistemas para complementar esta producción primaria. Estos sistemas complementarios son conocidos como procesos de recuperación mejorada de petróleo y pretenden aumentar la recuperación de crudo suministrando energía al yacimiento. Con estos métodos se aumenta el factor de recobro del yacimiento. Uno de los métodos de recuperación mejorada más aplicados es la inyección de agua. Por ello, el problema físico considerado en este trabajo es un proceso de recuperación mejorada por inyección de agua, donde el agua desplaza el petróleo manteniendo la presión en el yacimiento más o menos constante. En esta técnica de recuperación mejorada, el agua inyectada va desde los pozos de inyección hacia los pozos de extracción desplazando el petróleo hacia los pozos de producción. En este trabajo el flujo de petróleo y agua es modelado como flujo incompresible bifásico a través de medio poroso, despreciando la presencia de gas por no disponer de simuladores de flujo compresible para realizar las simulaciones.

1.2. Modelo numérico del yacimiento. Problema directo

Las ecuaciones de flujo en medios porosos combinan un conjunto de ecuaciones de conservación de la masa, momento y energía, así como también las ecuaciones de los fluidos y del material poroso. Por simplicidad y para no tomar en consideración la ecuación de conservación de la energía, en este trabajo se asume que el proceso de inyección de agua a estudiar corresponde a un proceso isotérmico [32, 35, 94].

Para empezar se plantea el caso más simple posible, flujo monofásico en una dimensión. Considerando la ley de conservación de la masa en una porción del material poroso con porosidad ϕ , área de la sección transversal A , y sobre un elemento de control diferencial de longitud Δx con un fluido de densidad ρ que fluye con velocidad u . Entonces el balance de masa en el elemento de control se escribe como:

$$\{\text{Masa}_{entra}\} - \{\text{Masa}_{sale}\} = \{\text{Cambio}_{masa}\},$$

ó

$$\{u\rho A\}_x - \{u\rho A\}_{x+\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t}\{\phi A\Delta x\rho\}. \quad (1.1)$$

Dividiendo por Δx y tomando el límite cuando Δx tiende a cero, se obtiene la ecuación de continuidad:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(A\rho u) = A\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho). \quad (1.2)$$

Cuando el área de la sección transversal es constante, se tiene

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho). \quad (1.3)$$

La ecuación de momento viene dada por las ecuaciones de Navier Stokes, pero pueden ser simplificadas para flujo a baja velocidad en materiales porosos por la ecuación de Darcy. La ley de Darcy simplificada para flujo horizontal en una dimensión, se escribe como

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.4)$$

Donde K es la permeabilidad de la roca, y μ es la viscosidad del fluido. En el caso de flujo inclinado, entonces la ecuación de Darcy toma en consideración la inclinación, incluyendo la gravedad g de la siguiente forma

$$u = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{dD}{dx} \right), \quad (1.5)$$

ó en términos del ángulo de inclinación α sería

$$u = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \sin(\alpha) \right). \quad (1.6)$$

Las ecuaciones constitutivas del medio poroso toman en cuenta la dependencia de la porosidad con la presión, de forma que se usa la definición de compresibilidad de la roca

$$C_r = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (1.7)$$

Al asumir la temperatura constante, esta ecuación queda

$$\frac{d\phi}{dP} = \phi C_r. \quad (1.8)$$

Si se asume que la compresibilidad de la roca es cero, entonces la porosidad no varía con la presión, despreciando el fenómeno de subsidencia que se presenta en ocasiones en campos con producción petróleo.

Por otra parte para describir el comportamiento de un fluido en el yacimiento, se aplica la definición de compresibilidad de un fluido a una temperatura dada T

$$C_f = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (1.9)$$

Para describir el comportamiento del petróleo negro convencional (“Black oil”), se usa el factor volumétrico de formación B y la relación gas petróleo en solución R_s , además de la viscosidad y la densidad del fluido. El factor volumétrico de formación del petróleo (B) se define como la relación entre volumen de petróleo a condiciones de yacimiento (presión y temperatura del yacimiento) y el volumen de petróleo a condiciones de superficie (condiciones estándares). Este factor está asociado con la expansión del gas (inicialmente disuelto en el petróleo) cuando se reduce la presión del fluido. La relación gas petróleo en solución (R_s) se define como la cantidad de gas disuelto en el petróleo por cada barril de petróleo que se produce en superficie.

De esta forma partiendo de la ecuación (1.3) y combinándola con las ecuaciones de Darcy y de propiedades del fluido, se obtiene una ecuación general para flujo de un fluido, en un sistema unidimensional, horizontal, de área constante y con condiciones adecuadas para aplicar la ley de Darcy

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right). \quad (1.10)$$

En este trabajo se asume que el petróleo es incompresible ($C_o = 0$), con $B = 1$ y $R_s = 0$, y al despreciar la compresibilidad de la roca, además se asume porosidad constante.

En el caso de flujo de más de una fase, por ejemplo, el flujo de petróleo y agua en un yacimiento sometido a un proceso de inyección de agua, considerado en este trabajo se parte de la ecuación de continuidad para cada fluido, tomando en cuenta las saturaciones y las propiedades de cada fluido (agua y petróleo):

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w u_w) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w S_w), \quad (1.11)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_o u_o) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_o S_o). \quad (1.12)$$

Tomando además en consideración la ecuación de Darcy correspondiente a cada fluido (petróleo y agua) se obtiene:

$$u_w = -\frac{K.k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial P_w}{\partial x}, \quad (1.13)$$

$$u_o = -\frac{K.k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Luego al introducir las ecuaciones de Darcy (1.13) y (1.14), en las ecuaciones de continuidad (1.11) y (1.12), tomando en cuenta las propiedades de los fluidos y tomando en cuenta los términos de producción de petróleo y agua (Q_o y Q_w) en el tiempo se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K.k_{rw}}{\mu_w B_w} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) - Q_w = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K.k_{ro}}{\mu_o B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) - Q_o = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right). \quad (1.16)$$

Basados en esta descripción, asumiendo la porosidad constante (independiente del tiempo) y generalizando el modelo a un dominio de dos dimensiones, en este trabajo se utiliza el siguiente sistema para la simulación de yacimientos que consiste de flujo incompresible, bifásico, de petróleo y agua en un medio poroso en dos dimensiones. El sistema viene dado por:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot [T_w(\nabla p_w + \rho_w g e_z)] = Q_w \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, t_f], \quad (1.17)$$

$$\phi \frac{\partial S_o}{\partial t} - \nabla \cdot [T_o(\nabla p_o + \rho_o g e_z)] = Q_o \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, t_f]. \quad (1.18)$$

En estas dos leyes de conservación para el agua (w) y para el petróleo (o), los efectos de gravedad son tomados en cuenta a través de los términos $\rho_w g e_z$ y $\rho_o g e_z$. Las variables involucradas en estas ecuaciones son la porosidad $\phi(\vec{x})$, la transmisibilidad del agua T_w y del petróleo T_o y las tasas de producción de agua y petróleo medidas en las posiciones de los pozos, Q_o y Q_w respectivamente. Estas dos ecuaciones diferenciales se resuelven utilizando las condiciones iniciales y de contorno adecuadas. Las condiciones iniciales se presentaran más adelante y en la frontera se pueden poner condiciones de contorno de tipo Neumann, de tipo Dirichlet o bien de flujo cero a través de la frontera. En ausencia de gravedad, las condiciones de contorno de flujo cero a través de la frontera se pueden implementar como una condición de Neumann con la derivada normal igual a cero, ya que en este caso esto implica que la velocidad normal del fluido en la frontera es cero. Lo que implica poner que la permeabilidad del medio que rodea al yacimiento es cero ($K = 0$ en $\partial\Omega$). Adicionalmente se consideran las ecuaciones de presión capilar y de saturación:

$$P_{cwo} = p_o - p_w, \quad (1.19)$$

$$S_w + S_o = 1. \quad (1.20)$$

Las variables involucradas en (1.19) y (1.20) se definen como:

P_{cwo} : Presión capilar agua-petróleo.

p_w : Presión en la zona de agua.

p_o : Presión en la zona de petróleo.

S_w : Saturación de agua.

S_o : Saturación de petróleo.

Así se genera un sistema de cuatro ecuaciones (1.17)–(1.20) y cuatro incógnitas p_w , p_o , S_w y S_o . La ecuación (1.20) que relaciona la saturación de agua (S_w) y la saturación de petróleo (S_o) indica que el medio poroso esta totalmente saturado con agua y petróleo. La saturación de un fluido en el yacimiento se define como la proporción del volumen del yacimiento que contiene ese fluido. La transmisibilidad del petróleo y del agua se asumen conocidas y se calculan con las siguientes expresiones:

$$T_w = K(\mathbf{x}) \frac{K_{rw}(S_w)}{\mu_w}; \quad T_o = K(\mathbf{x}) \frac{K_{ro}(S_w)}{\mu_o}; \quad T = T_w + T_o. \quad (1.21)$$

Los parámetros involucrados son:

T : Transmisibilidad total de los fluidos (agua y petróleo).

K : Permeabilidad absoluta del yacimiento.

$K_{rw}(S_w)$: Permeabilidad relativa al agua.

$K_{ro}(S_w)$: Permeabilidad relativa al petróleo.

μ_w : Viscosidad del agua.

μ_o : Viscosidad del petróleo.

La transmisibilidad de un fluido se define como la relación entre la permeabilidad efectiva y la viscosidad del fluido. Así, la permeabilidad efectiva es también una propiedad que depende de las propiedades del fluido y de las saturaciones y representa la facilidad que tiene el fluido de moverse a través del medio poroso. Por lo tanto la transmisibilidad del petróleo y del agua dependen de las saturaciones.

En este trabajo, para simplificar las simulaciones requeridas para la resolución del problema inverso se desprecian los términos de gravedad y la presión capilar de los fluidos en el yacimiento. Por lo tanto si en el problema directo se desprecian los términos de gravedad $\rho_w g e_z$ y $\rho_o g e_z$, así como también la presión capilar, queda $p_w = p_o = p$, las ecuaciones (1.17)–(1.20) son simplificadas, tal que se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$-\nabla \cdot [T \nabla p] = Q \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f] \quad (1.22)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot [T_w \nabla p] = Q_w \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \quad (1.23)$$

donde $Q = Q_w + Q_o$, así las incógnitas serán p y S_w , con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$S_w(\vec{x}, 0) = S_w^0(\vec{x}) \quad \text{en } \Omega, \quad (1.24)$$

$$p(\vec{x}, 0) = p^0(\vec{x}) \quad \text{en } \Omega, \quad (1.25)$$

$$\nabla p \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (1.26)$$

Como se mencionó anteriormente la condición de contorno (1.26) implica que no hay flujo a través de las fronteras. Las ecuaciones (1.22)–(1.26) serán el modelo básico para derivar nuestro algoritmo de inversión de formas. $Q(\mathbf{x}, t)$ y $Q_w(\mathbf{x}, t)$ definen el flujo total y el flujo de agua en los pozos. Estos flujos están dados por :

$$Q = cT \sum_{j=1}^{N_i} (p_{wb_j}^{(i)} - p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(i)}) + cT \sum_{j=1}^{N_p} (p_{wb_j}^{(p)} - p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(p)}) \quad (1.27)$$

$$Q_w = cT \sum_{j=1}^{N_i} (p_{wb_j}^{(i)} - p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(i)}) + cT_w \sum_{j=1}^{N_p} (p_{wb_j}^{(p)} - p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(p)}) \quad (1.28)$$

En (1.27) y (1.28) $\mathbf{x}_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, N_i$, indican las localizaciones de los N_i pozos inyectores, $\mathbf{x}_j^{(p)}$, $j = 1, \dots, N_p$, indican las localizaciones de los N_p pozos productores, y $p_{wb_j}^{(i)}$, $p_{wb_j}^{(p)}$ es la presión de fondo fluyente en los N_i pozos inyectores (impuesta por disponibilidad de bombeo de agua) y en los N_p pozos productores, respectivamente. Aquí, c es una constante que depende del modelo del pozo, llamada índice de productividad. En el modelo las tasas de flujo son positivas en los pozos de inyección y negativas en los pozos de producción.

Es importante destacar que Q_w es diferente de cero solo en las posiciones de los pozos. Por consiguiente, cuando se asume que la permeabilidad en la localización de los pozos es conocida (a partir de los registros en los pozos, por ejemplo), el segundo término en (1.15) desaparece y solo se debe evaluar el primer término con el objetivo de calcular la actualización en el resto del dominio Ω . Este es el enfoque utilizado en las reconstrucciones numéricas realizadas en este trabajo.

1.3. Métodos de simulación numérica

Para obtener una solución computacional del modelo de flujo bifásico en medios porosos presentado anteriormente en las ecuaciones (1.17)-(1.20) es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales usando herramientas numéricas. El método numérico tradicionalmente utilizado para resolver este problema en simulación de yacimientos ha sido el de diferencias finitas aunque en los últimos años también se utilizan los métodos de elementos finitos y más recientemente los métodos sin malla ('meshless') [13, 30], entre otros. En este trabajo se usan simuladores numéricos de diferencias finitas para resolver el problema directo (IMPES) y el adjunto asociado al flujo de petróleo y agua en el yacimiento. En esta sección, se describen los

dos métodos de diferencias finitas mas usados (IMPES e implícito) además del método de líneas de corrientes utilizado para generar los datos reales o de referencia.

El método IMPES es un método numérico muy usado en el área de simulación de yacimientos. El simulador numérico utilizado en este trabajo para resolver el problema directo durante el proceso de la reconstrucción se basa en este método. En el apéndice 1.1 se presenta la forma de resolver el sistema de ecuaciones descrito anteriormente, que representa el sistema físico objeto de análisis de este trabajo (flujo de petróleo y agua en el yacimiento). Las siglas IMPES provienen de la expresión “Implicit Pressure Explicit Saturation”, y describen la manera en la que se resuelven las ecuaciones; es decir, se calcula la presión implícitamente y la saturación explícitamente.

En el apéndice 1.2. se describe el método de líneas de corriente. En este trabajo se usa este método para generar los valores de presión y producción real o de referencia, dado el mapa de permeabilidad real o de referencia. Se usa este simulador para generar los datos con la finalidad de evitar el llamado “crimen asociado al problema inverso” ó “inverse crime”.

Una línea de corriente es una línea tangente en todo punto al campo de velocidades [94, 134] para todo instante de tiempo. El método de *líneas de corriente*, “*streamline*” [59, 58] es en cierto sentido un método similar al IMPES, ya que la presión se calcula implícitamente y la saturación de forma explícita. De hecho, para desarrollarlo, se parte de las ecuaciones (1.22) y (1.23) como en el método IMPES. Pero existe una diferencia básica que les hace completamente distintos, y es que en el método de *líneas de corriente* la ecuación de la saturación se resuelve sobre las líneas de corriente mediante un cambio de variables. Esto transforma una ecuación de dos o tres dimensiones, en un conjunto de ecuaciones en una dimensión.

Otro de los métodos numéricos utilizados tradicionalmente en la simulación de yacimientos de petróleo es el implícito (ver apéndice 1.3). Como su propio nombre indica, se calculan todas las variables implícitamente. Este método es bastante mas costoso numéricamente, pero por el contrario, es mucho mas estable que el IMPES, por lo que también es un método muy usado (de hecho en la actualidad es el usado por defecto, a pesar de su coste computacional y su mayor dispersión numérica). Al igual que en el método IMPES se parte de las ecuaciones (1.22) y (1.23), e igualmente se van a reescribir de otra forma que facilitará su resolución numérica.

1.4. Caracterización de yacimientos utilizando información estática

La caracterización de un yacimiento de hidrocarburos consiste en generar un modelo geológico del yacimiento (estructuras y propiedades físicas) basado en la integración de la información geofísica, petrofísica, geológica y de ingeniería con el fin de calcular reservas y crear un plan de desarrollo óptimo del campo. Por ello la caracterización es una etapa muy importante en el plan de explotación de un yacimiento de petróleo.

La etapa inicial de un proceso de caracterización de yacimiento consiste en la generación de un modelo estático inicial basado en información previa (estática). Esta información previa se consigue a partir de la interpretación de datos sísmicos 2D y 3D, registro de pozos, pruebas de laboratorios, análisis de ripios (muestras obtenidas durante la perforación), análisis de núcleos (muestras compactas tomadas en el yacimiento), entre otros.

Dentro de la etapa inicial del proceso de caracterización de yacimientos se siguen, en general, las etapas de modelización geológica, modelización de las propiedades físicas de la roca a partir de registros, inclusión del análisis de producción y por supuesto integración de la información disponible del campo. En la modelización geológica se desarrolla la modelización estructural a partir de la información sísmica y geológica del área, donde se dispone de sistemas para interpretación sísmica en 2D y 3D y modelización geológica para la integración de la información procesada. El análisis de los Registros Eléctricos se basa en la aplicación de algoritmos para estimar las propiedades físicas (permeabilidad y porosidad). Luego se integran la modelización geológica, el análisis de registro y la información de análisis de laboratorio usando una metodología de evaluación. La metodología de evaluación integra la información estática disponible y utiliza la determinación cuantitativa de la litología de la roca, textura, composición, sistema poral, arcillas y otros minerales sensibles. Finalmente, una vez aplicada la metodología de evaluación se obtiene un modelo que clasifica los tipos de roca y define los ambientes de depositación, generándose así un modelo estático inicial que caracteriza el yacimiento en estudio.

En caso de no existir datos de producción en el campo, el modelo estático inicial se usa como información de entrada en la aplicación de métodos volumétricos para estimar el potencial del yacimiento con el objetivo de determinar si es ó no rentable su explotación, evaluando las zonas potenciales

de producción.

Otra alternativa es la aplicación de los métodos estadísticos para generar más de un modelo inicial del yacimiento basado en la información previa (estática). Los métodos estadísticos [36, 106] buscan estimar la distribución de los parámetros a lo largo de todo el yacimiento conocidos los valores en los pozos de forma que se ajusten al resto de información que se tiene de la zona donde se encuentra el yacimiento, como puede ser la obtenida por métodos sísmicos o por otro tipo de estudios geológicos de la zona. Por otra parte con los métodos estocásticos (basados en información estática) se consigue una gran cantidad de “realizaciones equiprobables” (es decir, posibles mapas de los parámetros en el área del yacimiento que tienen la misma probabilidad de ser correctos en función de criterios basados en la información conocida). Por supuesto la gran mayoría de ellos no van a ajustar los datos de producción en los pozos ni siquiera aproximadamente. Debido a que es posible crear muchos modelos geológicos escalados equivalentes usando el modelado estocástico, se evalúan la incertidumbre del modelo y se confirman los hidrocarburos recuperables. De esta manera, la simulación del flujo de los modelos geológicos escalados en los percentiles P10, P50 y P90, resultan en unas curvas de producción acumulada pesimista, regular y optimista respectivamente (Ver [147]). Entre estos métodos estadísticos se encuentran el *kriging*, el *cokriging* y los modelos gaussianos (Ver [77, 36]).

En el caso de un yacimiento con historia de producción, el modelo estático inicial se usa como información de entrada para generar un modelo de simulación dinámico (que además toma en cuenta la información de los fluidos y los datos de producción) que debe ser ajustado para completar el proceso de caracterización del yacimiento generando un modelo estático final que se ajusta a la historia de producción con el objetivo de obtener un modelo de predicción que permita optimizar la producción del campo.

En este trabajo la idea es completar la caracterización de la permeabilidad en yacimientos con varias litofacies usando datos de producción e información previa (modelo estático inicial).

1.4.1. Caracterización de yacimientos con ajuste histórico de producción

El ajuste histórico de producción de los modelos de simulación de yacimientos es un gran reto para la industria del petróleo conocido como ajuste histó-

co (“history matching”) y es el objetivo central de esta tesis. El procedimiento de determinar los parámetros físicos del yacimiento que ajustan los datos de producción está asociado a un problema inverso asociado mal condicionado y con posibilidad de tener varias soluciones. Como definición de problema inverso se podría decir que dados los resultados de un proceso conocido en el que intervienen diferentes parámetros y variables (la producción en los pozos), el problema inverso consiste en averiguar los valores de los parámetros que han producido esos resultados (la permeabilidad).

Debido a que la información geológica previa en la que se basa el modelo estático inicial del yacimiento proviene de la interpretación de datos estáticos, este modelo solo puede ofrecernos una aproximación inicial imprecisa de las características del área en estudio. Esta imprecisión es la causante de que al empezar un estudio de simulación del yacimiento, los resultados de las simulaciones y los datos reales no coincidan. Eso supone la imposibilidad de conocer a priori la evolución de la producción del yacimiento, y por tanto de ajustar la producción a las necesidades de la compañía. Por ello en la industria del petróleo se ha puesto gran interés en desarrollar técnicas que permitan obtener un modelo del yacimiento confiable y que se ajuste con los datos de producción medidos en campo.

Como consecuencia de todo esto, en la ingeniería de yacimientos se vienen desarrollando y usando desde hace tiempo distintas técnicas de “ajuste histórico” que permiten ajustar los parámetros de forma que los resultados obtenidos con el simulador sean lo mas parecido posible a los datos reales (por ejemplo datos de presión y/o caudales) obtenidos hasta la fecha de la que se dispongan datos. Una parte de las técnicas de ajuste histórico de producción se enfocan en estimar o corregir las propiedades petrofísicas del yacimiento en cada celda (la permeabilidad y/o porosidad) [60, 59, 90]. Estos métodos normalmente funcionan bien en reconstrucciones con perfiles de permeabilidad suave, pero tienen la desventaja que no conservan el contraste de permeabilidad que existe en yacimientos con más de una litofacies, destruyendo las interfaces que existen entre diferentes tipos de rocas. Por otra parte para afrontar situaciones con yacimientos de dos ó mas litofacies con contraste en sus propiedades se han presentado otro grupo de técnicas para realizar el ajuste histórico de producción del yacimiento donde se reconstruye la distribución de las formas geológicas con diferentes propiedades [114, 114, 116, 117, 86, 83].

1.4.2. Yacimientos con perfiles de permeabilidad suaves

En el primer grupo mencionado anteriormente [1,4,6,10,12,13,22,23] donde se corrige la permeabilidad en cada celda se aplica un proceso de ajuste histórico automático ó iterativo donde el valor de permeabilidad real ó de referencia en cada celda es la incógnita. Se define el funcional de coste ó función objetivo como una medida del error cometido al simular con una cierta distribución de permeabilidad, por lo que en general esta función viene definida por una norma del error cometido por los resultados del simulador al compararlos con los resultados reales. Así, la idea es buscar una distribución del parámetro (permeabilidad) que minimiza el funcional de coste. Una importante dificultad en estos desarrollos es que los datos están solo en puntos específicos del yacimiento y no en todo el dominio, además de ser un problema que se referencia en la literatura como “ill-posed” [57].³ Con el objetivo de manejar estas dificultades, normalmente es necesario aplicar técnicas de regularización [49, 82, 66], para estabilizar el proceso de inversión y para dar una solución bien definida. En los últimos años se han propuesto una gran variedad de métodos de este tipo para encontrar el mínimo del funcional de coste en yacimientos con perfiles de permeabilidad suaves o regulares. Entre ellos, cabría destacar tres clases de métodos: los estadísticos, los basados en algoritmos genéticos y los que se basan en el cálculo del gradiente de la función objetivo.

Los métodos estadísticos aplican una perturbación al parámetro que se quiere ajustar (permeabilidad) siguiendo la teoría de modelos de Monte Carlo. Entre estos métodos cabe destacar el método de Kalman Filter que ha ganado popularidad en los últimos años como un método para el ajuste histórico de modelos de yacimientos [83, 89, 90, 95, 96, 152]. Los estudios publicados muestran que este método es una alternativa prometedora para la estimación de las propiedades petrofísicas (porosidad y permeabilidad) en yacimientos. Adicionalmente en los últimos años se ha introducido una modificación al método donde se generan una serie de modelos del yacimiento que son actualizados con información de presión y producción, este nuevo método es llamado “Ensemble Kalman Filter”. Cada modelo generado está asociado a una incertidumbre. El “Ensemble Kalman Filter” es un método que se

³Definición según J. Hadamard : Un problema es “well-posed” si satisface las siguientes condiciones: 1. Que exista la solución. 2. Que la solución sea única. 3. La solución depende continuamente de los datos. De no cumplirse alguna de estas condiciones el problema es “ill-posed” [65].

ajusta a la teoría de modelos Bayesianos y se inicializa con realizaciones de tipo estocásticas. Los datos de producción son incorporados secuencialmente en el tiempo, y la permeabilidad es corregida tomando en cuenta esos datos de producción. La corrección de la permeabilidad se realiza haciendo uso del “Kalman Gain”, el cual es una matriz que toma en consideración la covarianza de los parámetros y los datos combinado con una variable aleatoria.

Seguidamente están los algoritmos genéticos [9], estos cuales están diseñados para evitar los numerosos mínimos locales de la función objetivo, uno de los problemas mas graves en la resolución de cualquier problema inverso. Pero su coste computacional es tremendamente alto, ya que requiere la resolución de una gran cantidad de problemas directos, lo que los hace poco adecuados para este tipo de tarea.

En los métodos basados en el cálculo del gradiente del funcional de coste por lo general el cálculo del gradiente de esta función implica la resolución de múltiples problemas directos. En cualquier caso, este tipo de métodos tiene la desventaja de no poder evitar los mínimos locales, a no ser que el punto de partida este cerca del mínimo global. Como una modificación de los métodos de gradiente se encuentra el de “propagation back-propagation” [30]. Inicialmente estos algoritmos fueron aplicados con éxito a problemas inversos relacionados con la medicina (tomografía de ultrasonidos [100], tomografía optica [39, 40, 71, 37] y propagación de ondas electromagnéticas [42, 41, 91]) y luego se extendieron a la industria de petróleo. Este tipo de métodos tienen básicamente dos ventajas: la primera es que solo necesitan una simulación mas la resolución del problema adjunto por iteración; la segunda es que no necesitan calcular explícitamente el gradiente de la función objetivo, sino que se calcula directamente la actualización del parámetro que se este ajustando, ahorrando de esta manera algo de tiempo. Este método fue estudiado en detalle en un trabajo previo de nuestro grupo de investigación (ver el apéndice 2 para una descripción general) y consiste en corregir la permeabilidad en cada celda del yacimiento basado en una matriz de sensibilidad que sigue una dirección de descenso del funcional de coste [60].

Los coeficientes de sensibilidad están definidos por la expresión:

$$Sc(x, x_0, t) = \frac{\Delta Q_w(x_0, t)}{\Delta K(x)} \quad (1.29)$$

Esta definición puede ser vista como una derivada discreta del caudal de agua extraído como función de la permeabilidad. De esta forma para calcular el valor de estos coeficientes se debe hallar la solución para un valor

inicial de la permeabilidad, modificarla y hacer el cálculo en cada punto del dominio para finalmente hallar la solución para esta nueva distribución de la permeabilidad, para luego restársela a la solución inicial y dividir por la modificación de la permeabilidad, es decir:

$$Sc(x, x_0, t) = \frac{(Q_w(x_0, t) - \tilde{Q}_w(x_0, t))}{\Delta K(x)} \quad (1.30)$$

donde $\tilde{Q}_w(x_0, t)$ es el caudal de agua extraído correspondiente a la solución del problema con la permeabilidad perturbada $\Delta K(x)$ y x_0 es la posición del pozo donde se está midiendo el caudal de agua extraído.

La aplicación del método adjunto simplifica el cálculo de la matriz de sensibilidad del yacimiento y fue estudiado en un trabajo previo de nuestro grupo de investigación para el ajuste histórico. En ese trabajo la principal limitación que se presentó fue la presencia de mínimos locales del gradiente, lo que en ocasiones generaba modelos estimados diferentes al modelo real del yacimiento. Para reducir este efecto, en ese trabajo se aplicaron técnicas de regularización (Ej. Tikhonov) [49] para tratar de evitar la fragmentación de la reconstrucción del yacimiento lo que produce que la distribución de parámetros se suavice y por supuesto se destruye el contraste que se espera encontrar, por ejemplo en un yacimiento con dos litofacies. Por lo tanto la diferenciación entre las diferentes facies o regiones debe hacerse aplicando técnicas posteriores. En estos casos se pueden aplicar algunas técnicas de segmentación de imágenes pero tienen la desventaja de que no toman en cuenta los datos de producción [3, 101, 99, 124]. Por ello en este trabajo se extiende el método de inversión para ser aplicado en yacimientos con más de un tipo de roca y se aplican otros tipos de técnicas de regularización para evitar los mínimos locales.

1.4.3. Yacimientos con discontinuidad en la permeabilidad

Las técnicas de inversión de parámetros físicos en cada celda no incorporan la información correspondiente a diferentes tipos de roca durante el proceso de inversión a pesar de que en muchas aplicaciones prácticas se puede conocer a priori el número de tipos de rocas que componen la estructura del yacimiento gracias a la información estática del área. Por ejemplo en un estudio de yacimientos se puede conocer a priori que el yacimiento consiste

de dos litofacies, arena y lutita, así, en estos casos la caracterización del yacimiento consistirá en conocer la distribución de ambos tipos de roca a través del yacimiento y sus propiedades internas. Por ello recientemente se ha introducido la idea de manejar este tipo de situaciones como información de naturaleza binaria para reconstruir los cuerpos geológicos y describir los parámetros físicos del yacimiento [114, 115, 116, 117, 90] mejorando la estabilidad y la calidad de la estimación de parámetros usando los datos de producción.

Por una parte varios autores en publicaciones previas a este trabajo [114, 115, 116, 117, 114, 90] han desarrollado metodologías para identificar geometría de cuerpos geológicos, a partir del ajuste histórico de datos de producción, usando métodos de inversión. En estos estudios previos se utilizan formas parametrizadas. El gradiente de una función objetivo se utiliza para determinar pequeños cambios de los parámetros con la finalidad de mejorar el ajuste a los datos de producción. Generalmente el gradiente se calcula evaluando el cambio de la función objetivo en función de una pequeña perturbación en cada parámetro del modelo discretizado. La geometría de los diferentes cuerpos geológicos es definida a partir de la triangularización del contorno entre diferentes litofacies. Esta metodología fue presentada por Rahon et al. [115, 114, 117, 116] y consiste en la parametrización de las formas geológicas a partir del ajuste de los datos de presión. Esa metodología usa los métodos de gradiente y los métodos de inversión. Así, está basado en la minimización de una función objetivo la cual se calcula usando el operador adjunto. De esta forma, se estima la sensibilidad sobre el modelo continuo de los ajustes de la geometría de los objetos geológicos presentes. La derivada de los datos de producción con respecto a los parámetros petrofísicos (permeabilidad y/o porosidad) es calculada usando las ecuaciones de flujo y la resolución del modelo adjunto. Este método de identificación de las formas geológicas proviene de las técnicas de optimización [34]. La dificultad consiste en calcular los gradientes de los datos de producción con respecto a las perturbaciones de los parámetros geométricos, ya que estos últimos no aparecen directamente en las ecuaciones de flujo. Además la evolución de las formas se basa en triangularización de las fronteras por lo que cambios de topología no se manejan de manera automática.

En esta metodología utilizada para obtener un ajuste de producción automático a partir de la identificación de formas los principales pasos involucrados son la solución del problema directo, solución del problema adjunto y el análisis de sensibilidades sobre la función objetivo respecto a la forma

geológica parametrizada. El método matemático consiste en: determinar las sensibilidades sobre el modelo continuo, modelar las formas geológicas, calcular los gradientes y hacer uso del algoritmo de optimización para corregir los parámetros.

En general, el algoritmo básico para resolver el problema inverso según Rahon consiste en que una vez que el gradiente de la función objetivo ha sido calculado con respecto al desplazamiento de los parámetros que modelan la forma geológica, este gradiente puede ser introducido en un proceso de minimización: por ejemplo se puede usar el algoritmo de gradiente conjugado para encontrar el mínimo (cero) de la función objetivo. Para más detalles ver [115]

Por otra parte otro interesante enfoque de ajuste histórico de producción basado en el método de conjunto de nivel fue realizado simultáneamente con nuestro trabajo [86, 15, 83]. En ese trabajo se representan las formas geológicas del yacimiento usando varias funciones de conjunto de nivel y una técnica de escalamiento para encontrar la distribución de las estructuras con diferente permeabilidad en el yacimiento. Nuestro esquema difiere en varios aspectos de este enfoque. En nuestro trabajo se aplica el llamado esquema adjunto para calcular las sensibilidades de las formas durante la reconstrucción, lo que hace nuestro método más eficiente para problemas de gran escala. En segundo lugar, en nuestro trabajo aplicamos herramientas de regularización que consisten en aplicar un operador de tipo filtro en cada paso en lugar de usar técnicas de escalas múltiples como en [86, 136, 137, 135]. Además en nuestro trabajo se reconstruye la forma y el valor del parámetro (permeabilidad) simultáneamente independientemente de si el perfil interno se puede parametrizar ó no. En nuestro trabajo las inicializaciones toman en cuenta la información estática disponible en el campo, integrando modelos estocásticos, lo que hace mucho más realista y versátil la aplicabilidad de nuestra metodología. El grupo de investigación de la Universidad de Bergen en Noruega [86], ha aplicado la técnica de conjunto de nivel en caracterización dinámica de yacimientos, usando un método de escalamiento múltiple en caracterización de yacimientos. La idea de la investigación llevada a cabo por este grupo ha sido realizar el cotejo histórico de producción de yacimientos ajustando los valores de permeabilidad realizando escalamiento múltiple de los parámetros. Con este tipo de escalamiento se evita seleccionar un tipo de parametrización desde el inicio del proceso de reconstrucción, empezando con un modelo grueso y luego con refinamiento progresivo sucesivo en zonas con alta sensibilidad del yacimiento. En general este trabajo presenta

un enfoque de escalamiento múltiple adaptativo (AMS en anglosajon). La idea es usar el escalamiento múltiple para predecir los datos de producción y se usa la técnica de conjunto de nivel para corregir el mapa de permeabilidad. Se usa una malla gruesa para resolver el problema inverso y luego se aplica refinamiento sucesivo. Además han integrado el escalamiento múltiple con algoritmos de corrección de parámetros estocásticos. Un proyecto adicional creado por el grupo de la universidad de Bergen y que se encuentra en desarrollo se trata de gerencia de yacimiento y monitorización de yacimientos, donde se usa una representación de Lagrange del yacimiento [26] y se combina con la técnica de conjunto de nivel. El objetivo de este segundo proyecto es identificar las propiedades del yacimiento integrando los datos de producción y la información sísmica 4D disponible probando las técnicas de escalamiento múltiple comentada anteriormente y aplicando técnicas de descomposición del dominio. Las aplicaciones de ambos proyectos han consistido en probar las técnicas descritas en yacimientos bidimensionales sin compresibilidad, iniciando con modelo gruesos del yacimiento.

En general el trabajo realizado por el grupo de investigación de la universidad de Bergen consiste en resolver el problema inverso asociado a la reconstrucción de la permeabilidad. Para ello la permeabilidad (K) se parametriza usando una combinación de funciones bases. El algoritmo desarrollado por el grupo de Bergen utiliza una aproximación de la matriz Hessiana, por lo que es necesario calcular una matriz de sensibilidad en cada iteración.

1.5. Método de conjuntos de nivel y problemas inversos

El método de conjuntos de nivel para describir y modelar frentes que se propagan fue introducido hace aproximadamente 20 años. El artículo de Osher y Sethian [107] fue el primero en presentar el método en el año 1988. Desde entonces se ha aplicado de forma exitosa en muchas áreas de modelización y simulación numérica [109, 125, 44, 45, 55, 108, 119, 131, 132]. Este método sigue el movimiento de una interface relacionándola este con el nivel inicial (función de conjunto de nivel inicial) asociado a una función de distancia establecida según el caso. Así resulta una ecuación diferencial parcial de valor inicial para la evolución de la función conjunto de nivel representando el movimiento de la interface. De esta manera, las curvaturas y

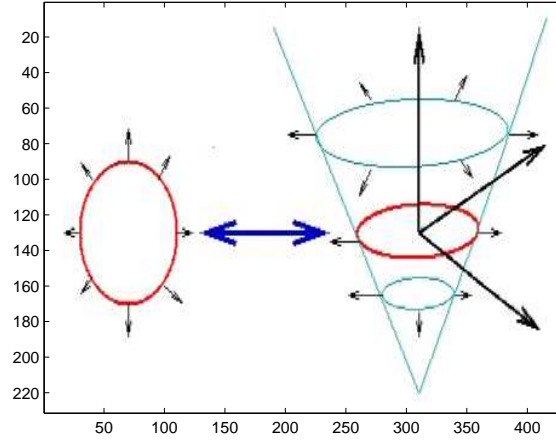


Figura 1.1: Izq.:El frente original en el plano xy Der.: Función conjunto de nivel.

normales al contorno en movimiento puede ser fácilmente evaluada, los cambios topológicos ocurren de una manera natural, y así esta técnica puede ser extendida en tres dimensiones.

Más allá de seguir la interface por sí misma, el método de conjunto de nivel introducido por Osher y Sethian [125] asigna valores de nivel a cada punto del dominio. Toma la curva original, llamada la función conjunto de nivel inicial. El frente rojo en la figura 1.1 es llamado conjunto de nivel inicial, porque este contiene la colección de todos los puntos que tienen cota o valor cero. Los valores de la función conjunto de nivel son negativos en el interior y positivos en el exterior. Una vez establecida la función conjunto de nivel inicial como la roja mostrada al lado izquierdo en la figura 1.1, seguidamente se construye una nueva interface (por ejemplo la elipse azul inferior al lado derecho de la figura 1.1) que representa la superficie en un momento dado.

Hasta el momento, puede parecer complicado abordar el problema de mover una curva según los niveles de una superficie externa. Pero la ventaja de hacer esto es que todas las curvas azules que se generan presentan un comportamiento fácil de manejar. Otra ventaja igualmente importante es que será fácil construir esquemas numéricos adecuados para aproximar las ecuaciones de movimiento. Para aplicar el método de conjunto de nivel para

modelar formas es necesario sintetizar conceptos adicionales, los cuales serán nombrados a lo largo del trabajo. Ahora se mencionan dos de estos conceptos:

Función conjunto de nivel inicial: Es una función inicial ajustada a la malla discretizada, la cual representa la forma inicial del modelo que se quiere representar. En el caso de este trabajo la función conjunto de nivel inicial será una función de distancia consistente con el mapa de facies inicial del yacimiento, basado en información previa del yacimiento.

Función de bandas (Narrowband): Es una vecindad del conjunto de nivel cero con una anchura que define el rango de celdas, en el caso de una malla discretizada, donde se aplicará la reconstrucción de la función conjunto de nivel. La idea es barrer esta zona establecida como narrowband y mover hacia adelante o hacia atrás la interface con un ancho esencialmente no mayor que la narrowband.

Aquí se presenta un estudio general de las técnicas recientes que permite la representación de formas usando el método de conjunto de nivel usando diferentes modelos físicos. La idea de combinar el método de conjunto de nivel con problemas inversos en este tipo de aplicaciones fue introducida por Santosa en el año 1996 [123], generando una representación binaria del medio para resolver el problema de reconstrucción de formas asociado. Adicionalmente en este trabajo se presenta una nueva aplicación, caracterización de yacimientos, y nuevas generalizaciones, por ejemplo extender los modelos de naturaleza binaria a modelos con distribuciones variables que optimizan las reconstrucciones obtenidas haciéndolas más realistas. Además la principal ventaja del método de conjunto de nivel es la facilidad para manejar cambios topológicos de forma automática haciendo que el método tenga gran potencial en el área de problemas inversos para reconstruir la estructura de los objetos.

1.6. Deformación de las formas a partir del cálculo de variaciones

Las deformaciones en las formas pueden ser representadas haciendo uso de la función conjunto de nivel. Aquí se explica la idea expuesta por Santosa en [123]. La idea principal es la deformación de las formas existentes de acuerdo al campo de velocidad normal a las fronteras de las formas.

Si se usa la definición del funcional de coste por mínimos cuadrados, y se

escribe en la forma de producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$ en el espacio de los datos, se obtiene

$$\mathcal{J}(K) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(K)\|_Z^2 = \frac{1}{2} \langle \mathcal{R}(K), \mathcal{R}(K) \rangle_Z. \quad (1.31)$$

El residuo $\mathcal{R}(K)$ puede ser desarrollado como

$$\mathcal{R}(K + \delta K) = \mathcal{R}(K) + \mathcal{R}'(K)\delta K + O(\|\delta K\|_P^2), \quad (1.32)$$

donde $\|\cdot\|_P$ es la norma en el espacio de los parámetros P , con una pequeña perturbación (variación) $\delta K \in P$. El operador lineal $\mathcal{R}'(K)$ (si existe) es la llamada *derivada de Fréchet* de \mathcal{R} . Introduciendo (1.32) en (1.31) se obtiene la relación

$$\mathcal{J}(K + \delta K) = \mathcal{J}(K) + \langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \delta K \rangle_P + O(\|\delta K\|_P^2). \quad (1.33)$$

El operador $\mathcal{R}'(K)^*$ es el operador adjunto formal de $\mathcal{R}'(K)$ con respecto a los espacios Z y P :

$$\langle \mathcal{R}'(K)^* g, \hat{K} \rangle_P = \langle g, \mathcal{R}'(K) \hat{K} \rangle_Z, \quad \text{para todo } \hat{K} \in P, g \in Z. \quad (1.34)$$

De esta forma

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{J}}(K) = \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \quad (1.35)$$

es la *dirección gradiente* de \mathcal{J} en K .

Las formas de las derivadas de Fréchet en la distribución de parámetros K con discontinuidades a lo largo de las interfaces son problemas específicos enfocados en este trabajo y en la literatura, por ejemplo [11, 17, 19, 68, 72, 73, 79, 118].

1.6.1. Cambio del parámetro K debido a las deformaciones de la forma

Moviendo cada punto \mathbf{x} del dominio Ω una pequeña distancia $\mathbf{y}(\mathbf{x})$. Se asume que el mapeo $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x})$ es suficientemente suave, tal que la estructura básica de la forma D se conserva. Entonces, los puntos localizados en la frontera $\Gamma = \partial D$ se mueven a nuevas posiciones $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}(\mathbf{x})$, y la frontera Γ será deformada a una nueva frontera $\Gamma' = \partial D'$ (ver figura 1.2).

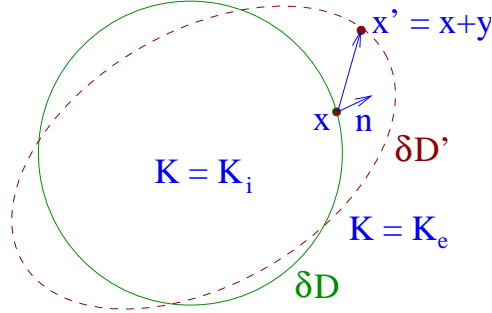


Figura 1.2: Deformación de las formas calculando pequeñas variaciones.

Asumiendo que la distribución de parámetros en Ω tiene una forma especial que varía en cada iteración. Se cuantifica este cambio de la distribución de parámetros $K(\mathbf{x})$ debido a una deformación infinitesimal. Como se mencionó anteriormente, aquí se presenta el esquema propuesto por [123] para el cálculo de variaciones para una frontera suficientemente regular ∂D . Considerando el producto interno de δK con una función de prueba f , se obtiene

$$\langle \delta K, f \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \delta K(\mathbf{x}) f(x) d\mathbf{x} = \int_{\text{symdiff}(D, D')} \delta K(\mathbf{x}) f(x) d\mathbf{x}. \quad (1.36)$$

Debido a que la diferencia entre D y D' es infinitesimal, se puede reducir el área integral a una integral de línea. Indicando $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ como el vector normal en \mathbf{x} , entonces, la integral en (1.36) se convierte en

$$\langle \delta K, f \rangle_{\partial D} = \int_{\partial D} (K_i(\mathbf{x}) - K_e(\mathbf{x})) \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) f(x) ds(\mathbf{x}), \quad (1.37)$$

donde $ds(\mathbf{x})$ es la longitud del arco. Usando el hecho de que en el límite $\delta K(\mathbf{x}) = K_i(\mathbf{x}) - K_e(\mathbf{x})$ en el punto de la frontera $\mathbf{x} \in \partial D$ debido a (2.1), se llega al resultado

$$\delta K(\mathbf{x}) = \varpi_{\partial D} \left((K_i(\mathbf{x}) - K_e(\mathbf{x})) \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right) \quad (1.38)$$

donde $\varpi_{\partial D}$ es el operador n -dimensional el cual restringe las funciones definidas en Ω a la frontera ∂D de la forma D ($n = 2$ ó 3 , usualmente). Por consiguiente, $\delta K(\mathbf{x})$ es interpretado ahora como una medida de superficie sobre ∂D .

Usando la distribución delta de Dirac n -dimensional $\delta_{\partial D}$ concentrada sobre la frontera ∂D de la forma D , se escribe (1.38) de la forma

$$\delta K(\mathbf{x}) = (K_i - K_e) \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \delta_{\partial D}(\mathbf{x}), \quad (1.39)$$

que es una distribución definida sobre el dominio completo Ω pero concentrada en ∂D [68, 76]. En los apéndices 3.1 y 3.2. se presenta una formulación alternativa de la variación del coste debido a un campo de velocidad.

1.7. Datos de los modelos de simulación

En general los datos de los modelos de simulación numérica que se estudian en este trabajo tienen una dimensión del yacimiento de 600 metros por 600 metros, discretizados en una malla de 25x25 ó de 40x40 celdas. Hay 9 pozos de producción y 4 de inyección organizados en un arreglo de 4 patrones de 5 pozos (cada patrón de 5 pozos consiste de un pozo inyector en el centro y cuatro pozos productores alrededor)(ver Fig. 2.1, superior izquierda). Hay dos fluidos incompresibles en el yacimiento (petróleo y agua).

En los modelos de simulación numérica que se presentan en este trabajo se usan los valores de permeabilidades relativas K_{rw} y K_{ro} usados en el trabajo previo de nuestro grupo de investigación, los cuales corresponden a una función Corey con coeficientes $n_w = 3$ y $n_o = 2$. Los valores de viscosidad para el petróleo y agua son $\mu_o = 0,79 \times 10^{-3}$ Pa s y $\mu_w = 0,82 \times 10^{-3}$ Pa s, y la porosidad se asume constante $\phi = 0,213$ en el yacimiento. Los valores de presión en el yacimiento se encuentran entre 2000 lpc [libras por pulgada cuadrada] (presión de fondo fijada en los pozos de producción) y 3500 lpc (presión de inyección fijada). El paso de tiempo numérico (que no está relacionado al paso de tiempo de la evolución artificial de las formas) usado en el simulador es 0,1 días, y el yacimiento es monitoreado por un período de 120 días. Para más detalles de los datos generales del modelo de simulación de yacimientos, ver [60].

Capítulo 2

Reconstrucción de Formas y ajuste histórico

Este capítulo presenta la derivación matemática del algoritmo asociado a la metodología desarrollada para la definición de geometrías litológicas usando el método de conjunto de nivel, en yacimientos con dos litofacies y valores de permeabilidad conocidos y constantes [143]. Además se presentan los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo en varios modelos de yacimientos con inicializaciones determinísticas y estocásticas.

En muchas situaciones existen más de un tipo de roca en diferentes regiones del yacimiento, lo que hace más complicado el trabajo de caracterización. En esos casos, la técnica de inversión celda a celda da reconstrucciones con las interfaces de las litofacies muy suavizadas [60]. Por consiguiente si hay más de un tipo de roca en el yacimiento, es necesario conocer la localización de las regiones con diferentes litologías además de tener una idea aproximada de los valores de propiedades físicas a obtener en cada región con la finalidad de obtener un modelo confiable. La mayoría de las herramientas de ajuste histórico automático usadas en la actualidad no son adecuadas para ser aplicadas a yacimientos con las fronteras desconocida de diferentes litofacies.

En esta parte del trabajo se presenta una técnica de reconstrucción de formas a partir de datos de producción de yacimientos con flujo bifásico (petróleo y agua) usando el método de conjunto de nivel. Se presenta una técnica novedosa para el ajuste histórico de datos de presión y producción en yacimientos con varias regiones con dos tipos de rocas bien diferenciados. Este proceso de ajuste histórico consiste en obtener una caracterización similar a

la forma real o de referencia de cada litofacie. El parámetro a ajustar es el área y localización de cada litofacie presente en el yacimiento a partir de los datos de producción. El objetivo de esta parte del trabajo es utilizar los datos de producción para estimar las formas y distribución de estas regiones en el yacimiento. Matemáticamente formulamos esta situación como un problema inverso para las ecuaciones de flujo bifásico, que describen la propagación del petróleo y el agua en el yacimiento. La distribución de las regiones o formas (en este caso arena o lutita) son representadas mediante una función de conjunto de nivel, la cual será ajustada usando los datos de producción.

Aquí se presenta el desarrollo de una metodología novedosa para describir la permeabilidad en yacimientos con más de un tipo de roca. Se afronta el problema de ajuste histórico de producción como un problema de reconstrucción de formas para flujo incompresible, bifásico de petróleo y agua en un medio poroso. Se usa el método de conjuntos de nivel, [95, 58, 89] para modelar regiones diferentes del yacimiento. Usando los datos de producción, y alguna información previa se genera el mapa inicial de permeabilidad binario que será modificado a lo largo del método.

En esta parte del modelo, se asume que la permeabilidad tiene dos valores conocidos y constantes correspondientes a las zonas de lutita y arena. En casos reales, estos valores pueden ser el valor promedio de cada una de las litofacies presentes en el yacimiento en estudio. Se realiza una evolución artificial de las formas geológicas modelada por la función de conjunto de nivel, la cual trata de reducir el funcional de coste del modelo. Una ventaja del método de conjunto de nivel es que no necesita conocer previamente la topología de la distribución de arena y lutita. La representación de la permeabilidad a través de la función de conjuntos de nivel cambiará automáticamente la topología durante la evolución artificial de las formas si es necesario con la finalidad de reducir el coste.

En esta parte del trabajo se presenta la teoría y experimentos numéricos para situaciones realísticas en dos dimensiones, los cuales muestran que nuestra técnica de inversión basada en las formas es capaz de recuperar formas con topologías complicadas en una forma estable y haciendo uso de pocos datos de producción. En los casos sintéticos estudiados en este capítulo los datos han sido generados usando el simulador de líneas de corrientes para evitar el llamado “inverse-crime” o “crimen asociado al problema inverso”.

En el problema de inversión de formas, se asume que el parámetro, en este caso la permeabilidad K tiene la forma:

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} K_i & \text{en } D \\ K_e & \text{en } \Omega \setminus D. \end{cases} \quad (2.1)$$

El dominio de interés se divide en varias zonas disjuntas, dentro de las cuales el parámetro solo puede tomar uno de los dos valores constantes y previamente establecidos (K_i or K_e), que pudiesen por ejemplo representar los valores promedios de la permeabilidad en cada tipo de roca o litofacie. (Generalizaciones a perfiles con valores variables y desconocidos $K_i(\mathbf{x})$ y $K_e(\mathbf{x})$ serán presentados en capítulos posteriores).

En la situación descrita aquí se busca identificar la distribución de las formas geológicas de dos litofacies presentes en el yacimiento. Se asigna un valor de permeabilidad promedio K_e para la primera litofacie y una permeabilidad K_i para la segunda litofacie. La incógnita es la forma geométrica de cada litofacie. El procedimiento comienza con una primera aproximación para la distribución de permeabilidad, la cual en la práctica puede ser obtenida a partir de la información previa del área en estudio, tal como registro de pozos, análisis de núcleos o interpretación sísmica, entre otros. Esta distribución es representada en una malla de $N_x \times N_y$ elementos. A partir de la inicialización, el algoritmo calcula una serie de formas que mejora sucesivamente el ajuste a los datos de producción \tilde{g} .

Para definir la región D con la técnica de conjunto de nivel (para obtener información general sobre la técnica de conjunto de nivel ver [107, 109, 125] y el Apéndice 3), se introduce una función de conjunto de nivel lo suficientemente suave ψ , tal que:

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} K_i, & \text{si } \psi(\mathbf{x}) \leq 0 \\ K_e, & \text{si } \psi(\mathbf{x}) > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Claramente, para cada función de conjunto de nivel ψ hay una única región D asociada con este. La frontera de D (denotada como $\Gamma = \partial D$) es definida por el conjunto de nivel cero de la función conjunto de nivel ψ . Para resolver el problema de reconstrucción de formas, se adopta un enfoque de evolución en tiempo [123]. Como consecuencia Γ y ψ serán funciones de una evolución artificial en tiempo t ,

$$\Gamma(t) = \{x : \psi(x, t) = 0\}. \quad (2.3)$$

En este desarrollo, el problema inverso se establece de la siguiente manera: encontrar una función ψ para la cual el funcional de coste, definido como el cuadrado de la norma de la suma del residuo en todos los pozos productores.

$$\mathcal{J}(\psi) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(\psi)\|^2. \quad (2.4)$$

Usando la ecuación (2.2) el residuo \mathcal{R} se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{R}(\psi) = \mathcal{R}(K(\psi)) . \quad (2.5)$$

El cual depende de la función de conjunto de nivel y abusando ligeramente de la notación se escribe también como función del parámetro K . Este residuo describe la diferencia entre los datos de producción reales o medidos, \tilde{g} , y los datos de producción obtenidos de la simulaciones g resolviendo el problema directo (1.22)-(1.28) con $K(\psi)$.

2.1. Derivación teórica del algoritmo de evolución de formas

En esta sección se deriva teóricamente un algoritmo de evolución de formas geológicas asociado al proceso de ajuste histórico de yacimientos de hidrocarburo. La idea es encontrar la evolución de las formas resolviendo el problema inverso a establecer. Con este propósito se considera la siguiente ley de evolución general para la función conjunto de nivel ψ describiendo la forma D durante la evolución artificial

$$\frac{d\psi}{dt} = f(\mathbf{x}, t, \psi, \mathcal{R}, g, \tilde{g}, \dots). \quad (2.6)$$

El objetivo es encontrar un término adecuado $f(\mathbf{x}, t, \psi, \mathcal{R}, g, \tilde{g}, \dots)$, el cual dependería de una variedad de parámetros tal como se indica. Así se buscará $f(\mathbf{x}, t, \psi, \mathcal{R}, g, \tilde{g}, \dots)$ hasta que la solución converge a la solución deseada del problema inverso.

Se introduce una función de naturaleza binaria o una función de Heaviside $H(\psi)$ la cual es definida como:

$$H(\psi) = \begin{cases} 1 & , \quad \psi > 0 \\ 0 & , \quad \psi \leq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Entonces, se puede escribir (2.2) como

$$K(\psi) = K_e H(\psi) + K_i (1 - H(\psi)). \quad (2.8)$$

Formalmente, derivando (2.8) con respecto a ψ se obtiene:

$$\frac{dK}{d\psi} = (K_e - K_i) \delta(\psi), \quad (2.9)$$

donde $\delta(\psi) = H'(\psi)$ es una función del tipo delta de Dirac de una dimensión. Por consiguiente derivando el funcional de coste definido anteriormente $\mathcal{J}(K(\psi(t)))$ con respecto a la variable artificial en tiempo t y aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{dK}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \frac{dK}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \right\rangle_P \quad (2.10)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ denota el producto interno del espacio de parámetros P . Introduciendo (2.6) y (2.9) en (2.10) genera finalmente

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), (K_e(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x})) \delta(\psi) f(\mathbf{x}, t, \psi, \mathcal{R}, g, \tilde{g}, \dots) \right\rangle_P. \quad (2.11)$$

Si se asume que la forma D es representada por una función *suficientemente diferenciable de conjunto de nivel* ψ tal que $|\nabla\psi| \neq 0$ en la frontera de la forma, entonces se puede usar la relación

$$\delta(\psi) = \frac{\delta_{\partial D}(\mathbf{x})}{|\nabla\psi(\mathbf{x})|}, \quad (2.12)$$

donde $\delta_{\partial D}$ es la distribución de Dirac de dimensión n concentrada en ∂D . Introduciendo esto en la ecuación (2.11) se obtiene:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), (K_e(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x})) \frac{\delta_{\partial D}(\mathbf{x})}{|\nabla\psi(\mathbf{x})|} f(\mathbf{x}, t, \psi, R, g, \dots) \right\rangle_P. \quad (2.13)$$

Ahora se define la dirección de reducción del residuo (dirección de máximo descenso) f_{sd} como

$$f_{sd}(\mathbf{x}, t, \psi, \mathcal{R}, g, \tilde{g}, \dots) = -F_{sd} |\nabla\psi|, \quad (2.14)$$

con

$$F_{\text{SD}}(\mathbf{x}) = (K_e - K_i) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \partial D. \quad (2.15)$$

Entonces, de (2.6) se obtiene una ecuación del tipo de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + F_{\text{SD}} |\nabla \psi| = 0. \quad (2.16)$$

Es importante destacar que (2.14) ha sido definida solo en las fronteras Γ de la forma D , por lo tanto necesitamos determinar una adecuada extensión de la velocidad F_{SD} para resolver (2.16). Con esta finalidad se escribe (2.13) de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}}{dt} = & - \int_{\partial D} [\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)] (K_e - K_i), \\ & \left([\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)] (K_e - K_i) \right) ds(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

y se verifica que es siempre negativa (≤ 0), tal que satisface la condición de ser una dirección de disminución del funcional de coste \mathcal{J} .

Obsérvese que (2.11) da idea de una alternativa adecuada para escoger el término f , la cual es también aplicable en la situación en la que algunos puntos de la frontera ∂D no satisfacen el requerimiento $|\nabla \psi| \neq 0$. Usando el hecho de que formalmente $\delta(\psi) > 0$, se puede definir una nueva dirección de descenso como

$$f_d(\mathbf{x}) = - (K_e - K_i) \chi_{\psi,d}(\mathbf{x}) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.18)$$

donde $\chi_{\psi,d}(\mathbf{x})$ es una función arbitraria que puede ser usada como una aproximación positiva a $\delta(\psi)$ donde el sub-índice d indica el grado de aproximación. En nuestros experimentos numéricos se usará:

$$\chi_{\psi,d}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ existe } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ con } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < d \text{ y } \psi(\mathbf{x}_0) = 0 \\ 0 & , \text{ otros casos} \end{cases}$$

lo que se denominará función de banda (“narrowband”). Otra aproximación puede ser encontrada por ejemplo en [109]. Esta dirección de búsqueda f_d , la cual es estable y fácil de calcular, introducida en (2.11), también da una dirección de descenso para $\mathcal{J}(K)$.

Numéricamente, discretizando (2.18) con el método de diferencias finitas para un tiempo artificial t y con un paso de tiempo $\tau > 0$ se obtiene la actualización de la función de conjunto de nivel

$$\frac{\psi(t + \tau) - \psi(t)}{\tau} = (K_i - K_e) \chi_{\psi,d} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K). \quad (2.19)$$

Interpretando $\psi^{(n+1)} = \psi(t + \tau)$ y $\psi^{(n)} = \psi(t)$, llegamos a la iteración

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} + \tau \delta \psi^{(n)}, \quad \psi^{(0)} = \psi_0, \quad (2.20)$$

con

$$\delta \psi^{(n)} = (K_i - K_e) \chi_{\psi^{(n)},d} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.21)$$

Es de hacer notar que la actualización descrita anteriormente aún no es del todo satisfactoria debido a que f_d y por consiguiente $\delta \psi^{(n)}$ podría ser muy irregular. Por ello, se requiere que la función de conjunto de nivel tenga ciertas propiedades de regularidad, por ejemplo que sea una función continua del tipo Lipschitz. Con el objetivo de manejar este problema, se asumirá que $\psi \in H_1(\Omega)$ donde

$$H_1(\Omega) = \{ \psi : \psi \in L_2(\Omega), \nabla \psi \in L_2(\Omega), \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \partial \Omega \}. \quad (2.22)$$

Usando este espacio de funciones normalmente es necesario reemplazar el operador adjunto $\mathcal{R}'(\psi)^*$ por un nuevo operador $\mathcal{R}'(\psi)^\circ$ que mapea los datos de producción en el espacio Sobolev $H_1(\Omega)$. Usando el producto interno con pesos

$$\langle v, w \rangle_{H_1(\Omega)} = \alpha \langle v, w \rangle_{L_2(\Omega)} + \beta \langle \nabla v, \nabla w \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad (2.23)$$

donde $\alpha \geq 1$ y $\beta > 0$ son parámetros cuidadosamente seleccionados, y repitiendo la derivación mostrada arriba con este nuevo espacio de funciones, se obtiene el nuevo término base de la evolución

$$\begin{aligned} f_r &= (\alpha I - \beta \Delta)^{-1} f_d \\ &= (\alpha I - \beta \Delta)^{-1} (K_i - K_e) \chi_{\psi,d} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.24)$$

El operador definido positivo $(\alpha I - \beta \Delta)^{-1}$ tiene un efecto de suavizar f_d debido a que éste se mapea a partir de $L_2(\Omega)$ junto al espacio más suave $H_1(\Omega)$.

La selección de los parámetros de peso α y β visualmente tendrá el efecto de suavizar la actualización no regularizada en diferentes grados. En particular, altas oscilaciones de frecuencias o discontinuidades de la actualización de la función de conjunto de nivel son eliminadas, lo que genera formas con fronteras más regulares. Para más detalles ver el apéndice 4.

Obsérvese que f_r es definido en todo el dominio Ω , tal que no es necesario determinar de nuevo extensiones de la velocidad una vez que este esquema de regularización es aplicado. f_r será el flujo que usaremos en los experimentos numéricos.

Más información sobre los esquemas de regularización con los operadores $(\alpha I - \beta \Delta)^{-1}$ puede ser encontrada en [60], donde el esquema ha sido explicado en detalle para un esquema de reconstrucción de permeabilidad en cada celda.

2.2. El algoritmo de reconstrucción de formas usando la técnica de conjunto de nivel

Se asume que se tiene un yacimiento con datos de producción real \tilde{g} los cuales han sido medidos físicamente en el campo o han sido generados corriendo un simulador independiente, por ejemplo un simulador de líneas de corriente sobre la distribución geológica real. Se usan simuladores de diferencias finitas (IMPES) para resolver el problema directo y el simulador adjunto para el proceso de reconstrucción. Como se menciono anteriormente estos tres simuladores (IMPES, líneas de corrientes, adjunto) han sido escritos e implementados en un trabajo previo por el grupo de simulación numérica de la Universidad Carlos III de Madrid. El uso de un simulador de líneas de corrientes para generar los datos diferente al utilizado durante el proceso de inversión hace que la inversión sea más realística y evita el llamado “crimen del problema inverso” (“inverse crime”).

Como en experimentos físicos reales, los datos calculados con el simulador de líneas de corrientes serán suficientemente diferentes de los datos calculados con el simulador IMPES. Por consiguiente, uno de ellos cumple el rol de datos físicos reales con el objetivo de probar el algoritmo de inversión desarrollado en este trabajo. La diferencia típica entre los datos (nivel de ruido) calculado con el método de líneas de corriente y el método IMPES es aproximadamente 3 %.

El algoritmo iterativo para la reconstrucción de formas geológicas usando

el método de conjuntos de nivel puede ser sumariado como:

1.) Dados los datos reales, calcular la función conjunto de nivel inicial $\psi^{(0)}$ como una función de distancia con signo correspondiente a la forma inicial, que toma en cuenta la información previa del yacimiento. Esta información previa, por ejemplo proveniente de los registros de los pozos genera aproximaciones confiables de los valores de permeabilidad en las cercanías de los pozos productores e inyectores. Durante las iteraciones sucesivas, los valores de permeabilidad en la localización de los pozos se fija con los valores reales. Colocar $n = 0$.

2.) Se usa el simulador IMPES para resolver el problema directo (1.22)–(1.26) sobre la última aproximación del mapa de parámetros (permeabilidad) $K(\psi^{(n)})$ para las formas geológicas. La forma correspondiente es $D^{(n)}$ con frontera $\Gamma^{(n)}$. Esto genera el vector de las medidas $g^{(n)}$. Calcular los residuos $\mathcal{R}(\psi^{(n)}) = g^{(n)} - \tilde{g}$.

3.) Resolver el problema adjunto (8.33) con $\rho = \mathcal{R}(\psi^{(n)})$. Entonces $\delta K = \mathcal{R}'(K)^* \rho$ es dado por la ecuación (8.32).

4.) Construir la función de bandas (narrowband) $\chi_{\psi^{(n)},d}$ que es una matriz con unos en las cercanías de $\Gamma^{(n)}$ y ceros en el resto del dominio. Calcular

$$\delta\psi^{(n)} = (K_i - K_e) \chi_{\psi^{(n)},d} \delta K \quad (2.25)$$

de acuerdo a (2.21).

5.) Calcular

$$\widehat{\delta\psi}^{(n)} = (\alpha I - \beta \Delta)^{-1} \delta\psi^{(n)} \quad (2.26)$$

con los parámetros de regularización $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Esto genera la actualización regularizada $\widehat{\delta\psi}^{(n)}$

6.) Actualizar la función conjunto de nivel

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} + \tau^{(n)} \widehat{\delta\psi}^{(n)}, \quad (2.27)$$

donde el tamaño de paso $\tau^{(n)}$ es determinado por un criterio de tamaño de paso. (En los experimentos presentados en este trabajo, se basa en el máximo número de celdas que cambian de signo de la función conjunto de nivel en cada paso). Re-escalar la función resultante tal que el mínimo de la función

conjunto de nivel ha sido fijado.

7.) Verificar el criterio de parada. Si el criterio no es alcanzado, regresar al paso 2.) con $n = n + 1$ y continuar las iteraciones, usando la actualización de la forma y la función conjunto de nivel para encontrar una nueva corrección.

2.3. Ejemplos Numéricos de reconstrucción de formas

Con el objetivo de verificar el comportamiento del algoritmo de inversión de formas usando el método de conjunto de nivel presentado previamente, en esta parte se presentan los resultados obtenidos en dos casos de dos dimensiones. Estos casos serán discutidos en lo siguiente. En ambos casos, la dimensión del yacimiento es 600 metros por 600 metros, discretizados en una malla de 25x25 celdas. Hay 9 pozos de producción y 4 de inyección organizados en un arreglo de 4 patrones de 5 pozos (cada patrón de 5 pozos consiste en un inyector en el centro y cuatro pozos productores alrededor)(ver la figura 2.3, donde los pozos de inyección son indicados por círculos (\circ), pozos de producción indicados con signo positivo ($+$)). En estos resultados se asume que cada distribución de permeabilidad está formada por dos litofacies, lutita y arena. En estos casos la permeabilidad de la lutita es 250 milli-Darcy (mD), y la permeabilidad de la zona de arena es 1500 mD. Esto significa que hay un alto contraste entre dos regiones. Todos los parámetros físicos del yacimiento se asumen constantes y conocidos, así la única incógnita en estos ejemplos es la topología de las regiones de arena y lutita, la cual será reconstruida usando los datos de producción. En estos casos hay dos fluidos incompresibles en el yacimiento (petróleo y agua). En los simuladores numéricos, se usan los datos que se presentan en el capítulo de introducción, sección 1.7.

2.3.1. Reconstrucción de formas. Primer ejemplo

El primer ejemplo numérico describe una situación de 5 regiones distribuidas en bandas con propiedades intercaladas. Ver la figura 2.3 superior izquierda. La banda central y las bandas de las esquinas consisten de lutita, mientras las otras dos bandas corresponden a arena. La inicialización se muestra en la figura 2.3 superior derecha. La función conjunto de nivel ini-

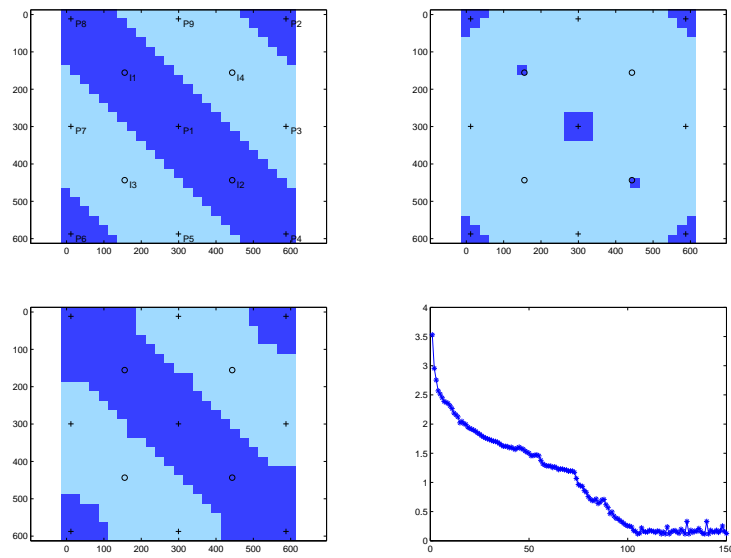


Figura 2.1: Reconstrucción de Formas, primer ejemplo, primera inicialización. superior izquierda: Forma real; superior derecha. : inicialización; inferior izquierda: reconstrucción después de 150 iteraciones; inferior derecha: evolución del funcional de coste.

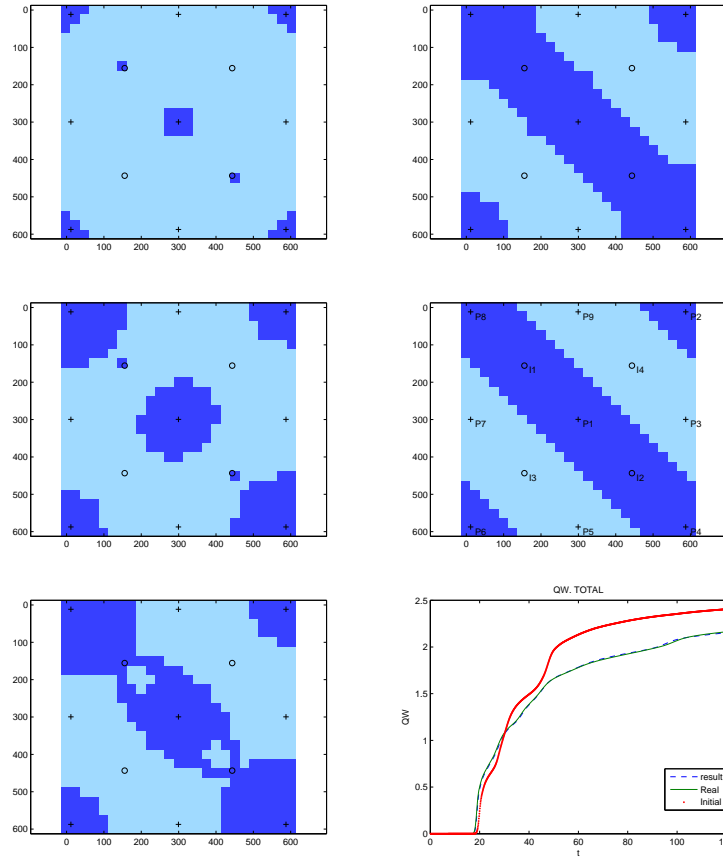


Figura 2.2: Evolución de formas, primer ejemplo, primera inicialización. Columna izquierda desde arriba hacia abajo : inicialización, después de 40 y 80 iteraciones; columna derecha desde arriba hacia abajo: después de 150 iteraciones y modelos de referencia o real; Imagen inferior derecha: Tasa de producción total de agua en m^3/s con los días para el modelo inicial(curva superior), para el modelo real o de referencia (solido inferior) y la reconstrucción final (inferior discontinua).

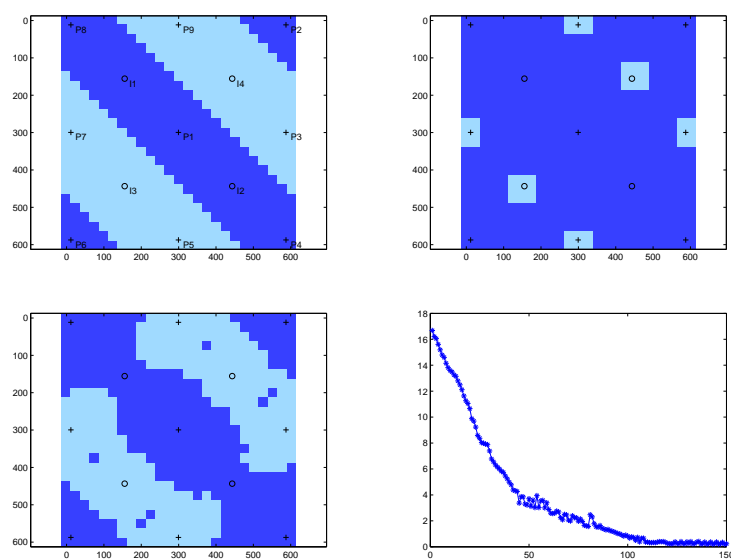


Figura 2.3: Reconstrucción de formas, primer ejemplo, segunda inicialización. superior izquierda: forma real; superior derecha: inicialización; inferior izquierda: reconstrucción después 150 iteraciones; inferior derecha: Evolución del funcional de coste.

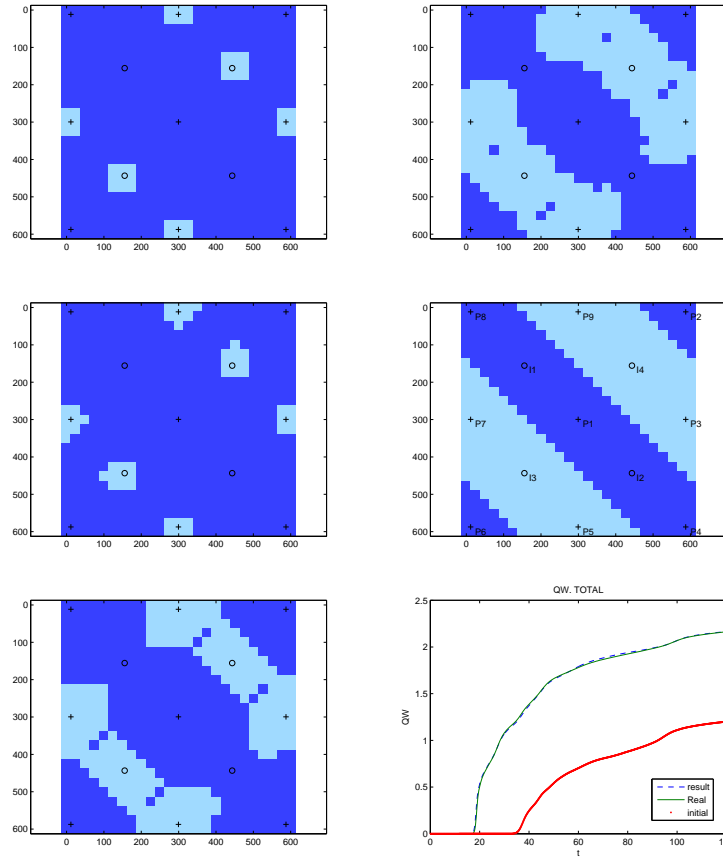


Figura 2.4: Evolución de formas, primer ejemplo, segunda inicialización. Columna izquierda desde arriba hacia abajo : inicialización, después de 50 y 100 iteraciones; columna derecha desde arriba hacia abajo: después de 150 iteraciones y modelos de referencia o real; Imagen inferior derecha: Tasa de producción total de agua en m^3/s con los días para el modelo inicial(curva inferior), para el modelo real o de referencia (solido superior) y la reconstrucción final (discontinua).

cial es la correspondiente función de distancia con signo la cual es calculada analíticamente. Comenzando con esta inicialización, el algoritmo descrito en la sección 2.2 calcula varias actualizaciones para la función conjunto de nivel con un criterio de selección del paso donde en cada iteración cambian de valor de permeabilidad un máximo de 4 celdas. Este criterio ha sido seleccionado para garantizar una evolución suave de la reconstrucción. En la práctica, se pueden tomar pasos más grandes tomando un criterio de selección de paso diferente y generando una evolución menos suave. Los parámetros de regularización α y β han sido escogidos de acuerdo con el criterio explicado en [60]. El criterio de parada aplicado en este ejemplo es alcanzar un residuo estable.

En la reconstrucción mostrada en la figura 2.2 para la inicialización se asume como criterio inicial que el yacimiento consiste de arena en aquellos lugares del yacimiento donde no se disponen de datos fuertes (puntos lejanos de los pozos). Una incógnita que se plantea para esta reconstrucción es que pasaría si en estos puntos sin información previa se supone que hay lutita para la inicialización. Con el objetivo de responder esta incógnita se estudia un experimento numérico adicional donde se cambia la inicialización como se muestra en la imagen superior derecha de la figura 2.3. Las figuras 2.3 y 2.4 muestran el resultado de esta última evolución. Es importante destacar que el resultado final de la reconstrucción no cambia significativamente usando dos inicializaciones diferentes.

La figura 2.3 muestra la forma real (superior izquierda), la inicialización (superior derecha), la reconstrucción final después de 150 iteraciones (inferior izquierda) y la evolución del funcional de coste (inferior derecha). La evolución de la forma durante la reconstrucción se muestra en la figura 2.2. Adicionalmente, en la imagen inferior derecha de la figura se muestra la tasa de producción total de agua (en m^3/s) para el modelo inicial, el modelo de referencia o real y la reconstrucción final como una forma alternativa para verificar el ajuste de los datos de producción aplicando el algoritmo expuesto. En el proceso de reconstrucción se evidencia que ocurren cambios topológicos durante la evolución y son manejados sin problemas por el algoritmo.

2.3.2. Reconstrucciones de formas. Segundo ejemplo

El segundo ejemplo numérico es similar a una situación que ha sido considerada en [60] usando un esquema de reconstrucción basado en corrección en cada celda y que no se obtuvo una reconstrucción satisfactoria debido

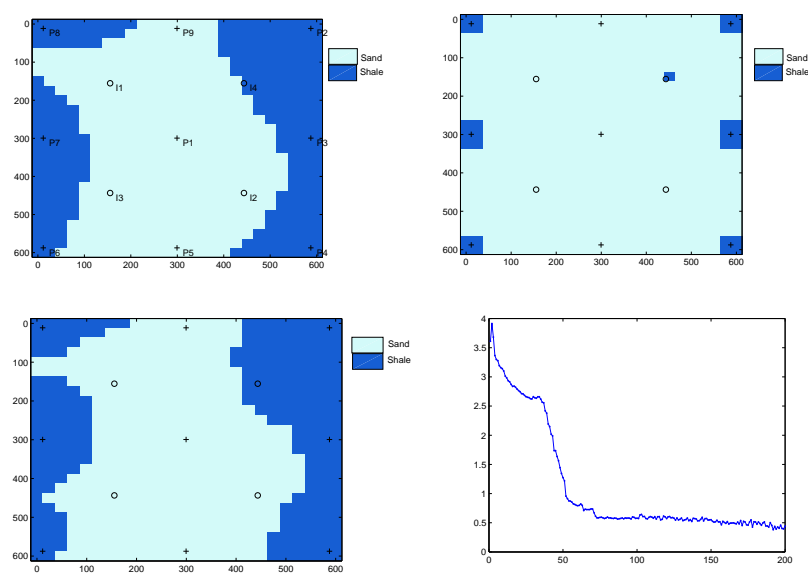


Figura 2.5: Reconstrucción de formas, segundo ejemplo. Superior izquierda: forma real; superior derecha: inicialización; inferior izquierda: reconstrucción final; inferior derecha: evolución del funcional de coste.

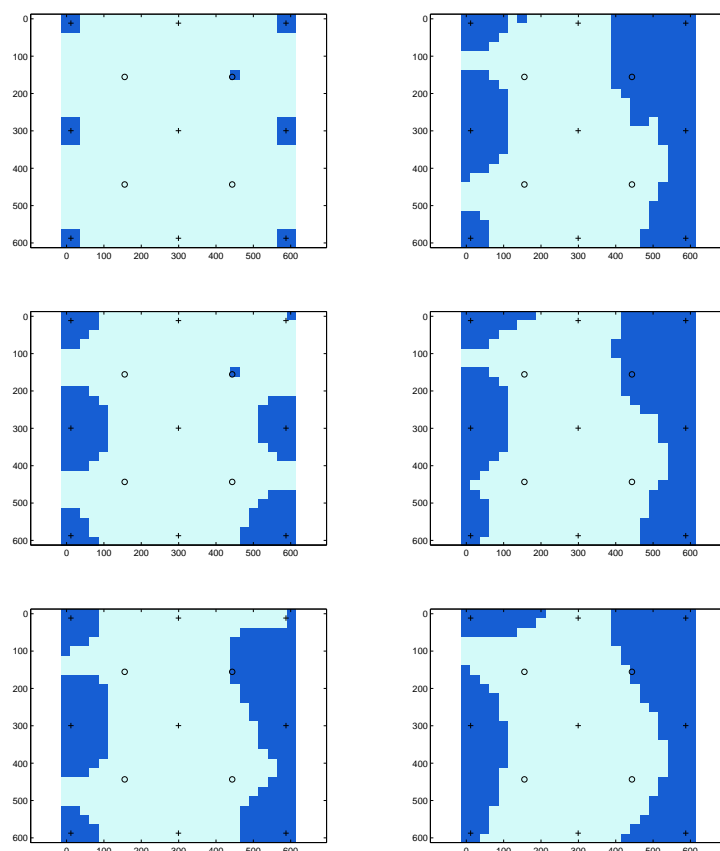


Figura 2.6: Evolución de formas, segundo ejemplo. Columna izquierda desde arriba hacia abajo.: inicialización, después de 25 y 50 iteraciones; columna derecha desde arriba hacia abajo: después de 150 y 200 iteraciones; imagen inferior derecha: forma real.

a que el esquema de corrección en cada celda destruye las fronteras de las zonas con diferentes litologías. Este modelo consiste en una región central formada por arena de alta permeabilidad rodeada por lutita (ver figura 2.5). De nuevo la función conjunto de nivel inicial es una función de distancia con signo correspondiente a la inicialización de las formas. En este ejemplo se usa un criterio de paso para la función conjunto de nivel donde se permite el cambio de valor de la permeabilidad en un máximo de 5 celdas. El ancho de la función de banda es 3 celdas.

La figura 2.5 muestra la forma real o de referencia (superior izquierda), la inicialización (superior derecha), la reconstrucción final después de 200 iteraciones (inferior izquierda) y la evolución de la norma del funcional de coste (inferior derecha). La evolución de la forma durante la reconstrucción es mostrada en la figura 2.6. También aquí, cambios de topología ocurren durante la evolución y son manejados sin problema por el algoritmo.

En esta sección se han presentado dos ejemplos numéricos sintéticos pero con situaciones realistas los cuales muestran que el método es capaz de reconstruir formas complicadas a partir de pocos datos de producción, los cuales en estos casos han sido generados por un simulador de flujo diferente, específicamente un simulador de líneas de corrientes. Los cambios topológicos que ocurren durante la evolución artificial de las formas son manejados de manera automática y con facilidad por la formulación de conjunto de nivel utilizada.

2.4. Inicialización geoestadística gaussiana

En esta parte se estudia el comportamiento de la metodología aplicada anteriormente usando diferentes inicializaciones. En esta sección se generan inicializaciones geoestadísticas, con la misma probabilidad de ocurrencia como realizaciones iniciales. Las realizaciones han sido generadas usando la librería de fortran GSLIB [36].

El primer paso es la generación de realizaciones estocásticas, donde se representan los datos de permeabilidad en las posiciones de los pozos mediante un semivariograma y luego se aplica simulación gaussiana secuencial para generar las realizaciones estocásticas. El semivariograma da una idea de la variabilidad de los datos estáticos del yacimiento y es la clave de un estudio geoestadístico. Además se define como la varianza del incremento $[Z(u) - Z(u + h)]$, donde Z es una variable aleatoria estacionaria, u es la

localización de una medida y h es la distancia entre dos medidas de permeabilidad. El variograma mide la diferencia entre los datos con respecto a la distancia.

A partir de los valores de permeabilidad medidos en la ubicación de los pozos se genera un semivariograma experimental, cuya representación gráfica permite obtener los parámetros necesarios para la descripción de la tendencia de los datos en la simulación gaussiana secuencial. Los datos generales que se usan para generar un semivariograma son los valores de permeabilidad, las direcciones y ángulos de búsqueda de los valores y la distancia de búsqueda entre datos, entre otros. Por otra parte, los parámetros que se extraen del semivariograma experimental son, el *nugget* (c : corte de la tendencia con el eje y), el *range* (a : valor de x al que corresponde el inicio de una tendencia constante en y), y el modelo de semivariograma que mejor ajusta la tendencia de los datos. Los modelos de semivariogramas que el programa GSLIB permite ajustar a los datos experimentales a través de semivariogramas son:

1. **Esférico:**

$$\gamma(h) = \begin{cases} c[1,5\frac{h}{a} - 0,5(\frac{h}{a})^3], & \text{si } h \leq a \\ c, & \text{si } h > a. \end{cases} \quad (2.28)$$

2. **Exponencial:**

$$\gamma(h) = c[1 - \exp(-\frac{3h}{a})] \quad (2.29)$$

3. **Gaussiano:**

$$\gamma(h) = c[1 - \exp(-\frac{(3h)^2}{a^2})] \quad (2.30)$$

4. **Potencia $0 < w < 2$:**

$$\gamma(h) = ch^w \quad (2.31)$$

2.4.1. Simulación gaussiana secuencial para generar inicializaciones

La simulación gaussiana secuencial (SGS) es usada para estimar las propiedades físicas del yacimiento (en nuestro caso la permeabilidad) en regiones donde no hay valores disponibles. La estimación es basada en la información disponible en las localizaciones de los pozos. Este procedimiento usa fundamentos estadísticos sobre la distribución de los parámetros que son representados a través de un semivariograma. Usando esta información, SGS crea

una familia de realizaciones gaussianas del yacimiento que son equiprobables y respetan los valores medidos en las localizaciones de los pozos. Aplicando una cota máxima y mínima a las realizaciones, se obtienen simulaciones gaussianas truncadas que son representaciones binarias del yacimiento (en este caso existen dos litofacies). Estas realizaciones son usadas con el objetivo de calcular las funciones conjunto de nivel como funciones de distancia para cada realización que será la función conjunto de nivel inicial del proceso de evolución de formas presentado anteriormente.

Los pasos básicos del proceso SGS para obtener las 10 inicializaciones binarias generadas con el programa SGSIM de la librería de Fortran GSLIB [36] luego de aplicar las cotas máximas y mínimas son:

1. Generar un camino aleatorio a través de los nodos del yacimiento.
2. Visitar el primer nodo del camino y usar kriging (interpolación con distancia) para estimar un promedio μ y la desviación estándar σ del parámetro en el nodo basado en los valores disponibles (medidas en los pozos) de estos parámetros en un conjunto de puntos cercanos en la malla.
3. Seleccionar un valor aleatorio a partir de la distribución gaussiana correspondiente del tipo (μ, σ) y poner estos valores en el nodo dado como parámetro.
4. Volver al paso 2 seleccionando un nuevo nodo y de este modo visitar cada nodo sucesivo en el camino aleatorio y repetir el proceso, tomando en cuenta los valores previamente estimados dentro de una pequeña distancia del nodo actual.

Algunos comentarios importantes referente al proceso SGS:

- Se usa un camino aleatorio para evitar problemas de singularidades que pudiesen ocurrir si se toma un camino regular a lo largo de la malla.
- Se incluyen los nodos con la propiedad previamente estimada dentro de una distancia dada del nodo en estudio con la finalidad de preservar la estructura de la covarianza entre los valores estimados.
- En SGS, es importante que los datos sigan una distribución gaussiana. Si inicialmente los datos no satisfacen esta propiedad, se usa una transformación previa a los datos con la finalidad de normalizarlos.

2.4.2. Experimentos numéricos y discusión

Como se mencionó anteriormente en esta sección se crean simulaciones gaussianas del yacimiento con el objetivo de generar inicializaciones para el algoritmo de reconstrucción de formas geológicas usando el método de conjunto de nivel explicado anteriormente. La idea es comparar los resultados obtenidos usando inicializaciones determinísticas, como las usadas hasta ahora, con los resultados obtenidos usando realizaciones geoestadísticas. Ambos tipos de inicializaciones tienen como datos de partida los datos en las localizaciones de los pozos. La diferencia entre ambas inicializaciones es que la determinística usa los valores medidos en los pozos en pequeñas distancias o zonas de certidumbre desde el pozo y las inicializaciones geoestadísticas tienen interpretación probabilística como se mencionó en la sección anterior. Por otra parte las inicializaciones estocásticas a veces generan formas geológicas no reales en zonas de bajas sensibilidad que nuestro método no siempre es capaz de remover. En esta sección se pretende analizar la velocidad de convergencia del método en función de las inicializaciones utilizadas.

Dados los valores de permeabilidad en las localizaciones de los pozos, se crean los semivariogramas y luego se generan las inicializaciones gaussianas con el programa SGSIM. Posteriormente se aplican las cotas máximas y mínimas a las inicializaciones de la permeabilidad, obteniéndose un conjunto de mapas iniciales del yacimiento. En la figura 2.7 se muestra la permeabilidad real o de referencia (superior izquierda) y la evolución del funcional de coste para las 10 inicializaciones, 9 geoestadística y una determinística (superior derecha). El funcional de coste inicial para las 10 realizaciones se muestra en la figura inferior izquierda. Las primeras barras azules corresponden a las inicializaciones estocásticas y la barra roja corresponde a la inicialización determinística, utilizada en el capítulo anterior para realizar la reconstrucción. El funcional de coste correspondiente a las reconstrucciones finales se presenta en la figura inferior derecha, y de forma análoga las barras azules corresponden a las inicializaciones geoestadísticas, mientras que la barra roja muestra el valor del coste de la reconstrucción obtenida a partir de la inicialización determinística. Como se puede observar el coste inicial se encuentra entre 3 y 25, correspondiendo el menor valor de coste inicial a la inicialización determinística mientras que el coste final es similar para todas las reconstrucciones.

En la figura 2.8 se presentan las primeras 5 inicializaciones utilizadas. Las inicializaciones geoestadísticas se presentan en la columna izquierda y

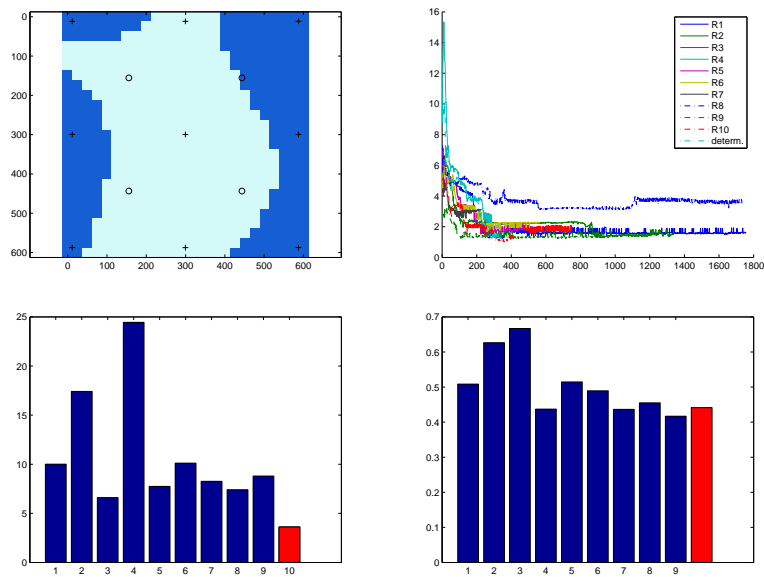


Figura 2.7: Realizaciones estocásticas. Diferentes inicializaciones. Permeabilidad Real (superior izquierda); evolución del funcional de coste para las 10 realizaciones (superior derecha); coste inicial (inferior izquierda); coste final (inferior derecha)

las reconstrucciones correspondientes se presentan en la columna derecha. De forma análoga en la figura 2.9 en la columna izquierda se presentan las inicializaciones geoestadísticas 6 hasta la 9, y la fila 5 corresponde a la inicialización determinística. Así las columnas izquierdas de la figuras 2.8 y 2.9 muestran las inicializaciones y la derecha muestra las reconstrucciones.

Una técnica de evaluación de incertidumbre fue aplicada en [147], donde se aplica la metodología de reconstrucción solo en 3 realizaciones geoestadísticas, la de mayor coste inicial, la de menor coste inicial y una con coste inicial céntrico. De esta forma se seleccionan del conjunto de realizaciones geoestadísticas iniciales las tres más representativas, minimizando el número de reconstrucciones. Como se puede observar las reconstrucciones obtenidas usando el método de conjunto de nivel en todos los casos se aproximan a la distribución de permeabilidad real o de referencia. Las inicializaciones gaussianas evolucionan sin problema usando el esquema previamente propuesto.

2.5. Publicaciones y presentaciones

Publicaciones:

1. (2006) Shape reconstruction from two-phase incompressible flow data using level sets, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Proceedings of the International Conference on PDE-Based Image Processing and Related Inverse Problems, CMA, Oslo, August 8–12, 2005, (Eds: X.-C. Tai, K.-A. Lie, T.F. Chan, and S. Osher), pp. 1-19, Series: Mathematics and Visualization, Publisher: Springer, ISBN 078-3-540-33266-4.
2. (2007) Characterization of reservoirs by evolving level set functions obtained from geostatistics, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Proc. 14th European Conference on Mathematics for Industry (ECMI 2006), 10-14 July 2006, Leganes, Spain. Publisher: Springer

Presentaciones:

1. (2005) August 8-12, Shape reconstruction from two-phase incompressible flow data using level sets, (with R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan, presented by O. Dorn), International conference on 'PDE-based image processing and related inverse problems, CMA, Oslo, Norway.

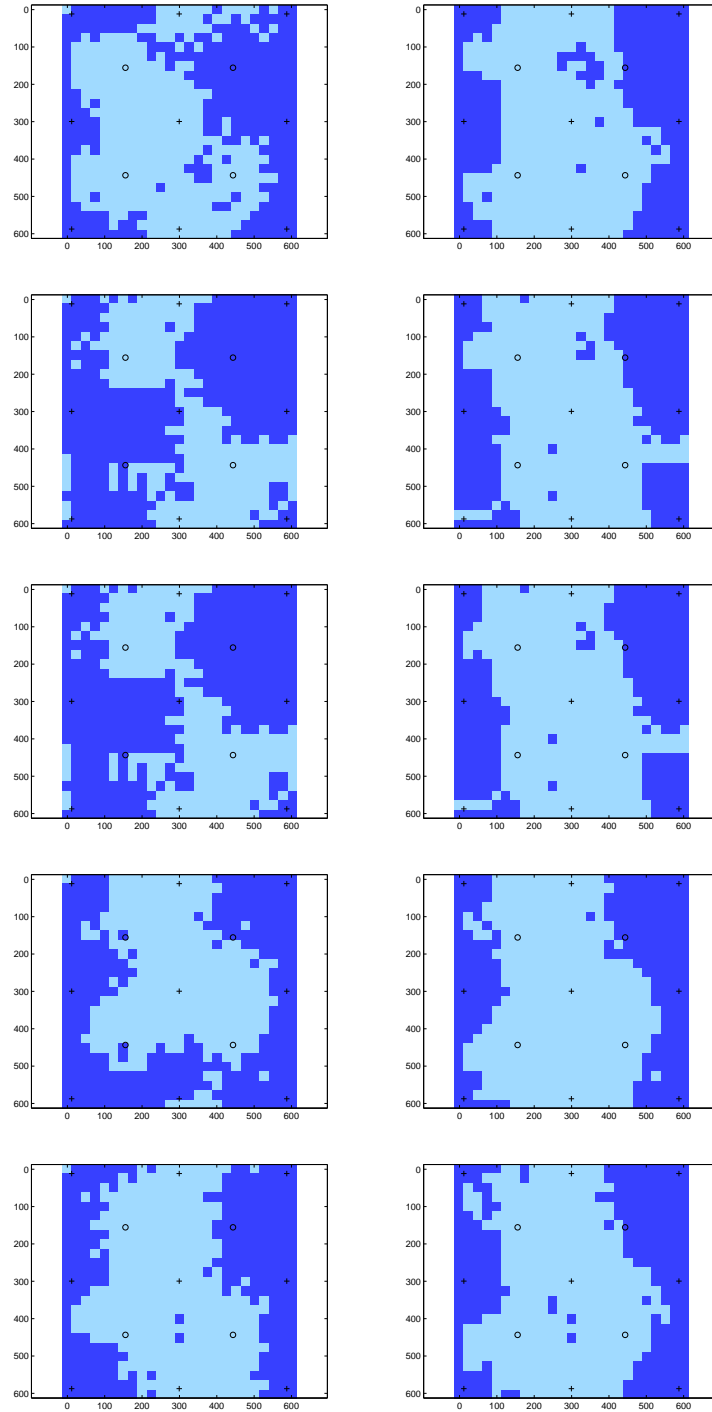


Figura 2.8: Reconstrucciones usando las 5 primeras inicializaciones estocásticas. Columna izquierda: desde arriba hacia abajo inicializaciones gaussianas (1 hasta 5). Columna derecha: desde arriba hacia abajo reconstrucciones finales (1 hasta 5).

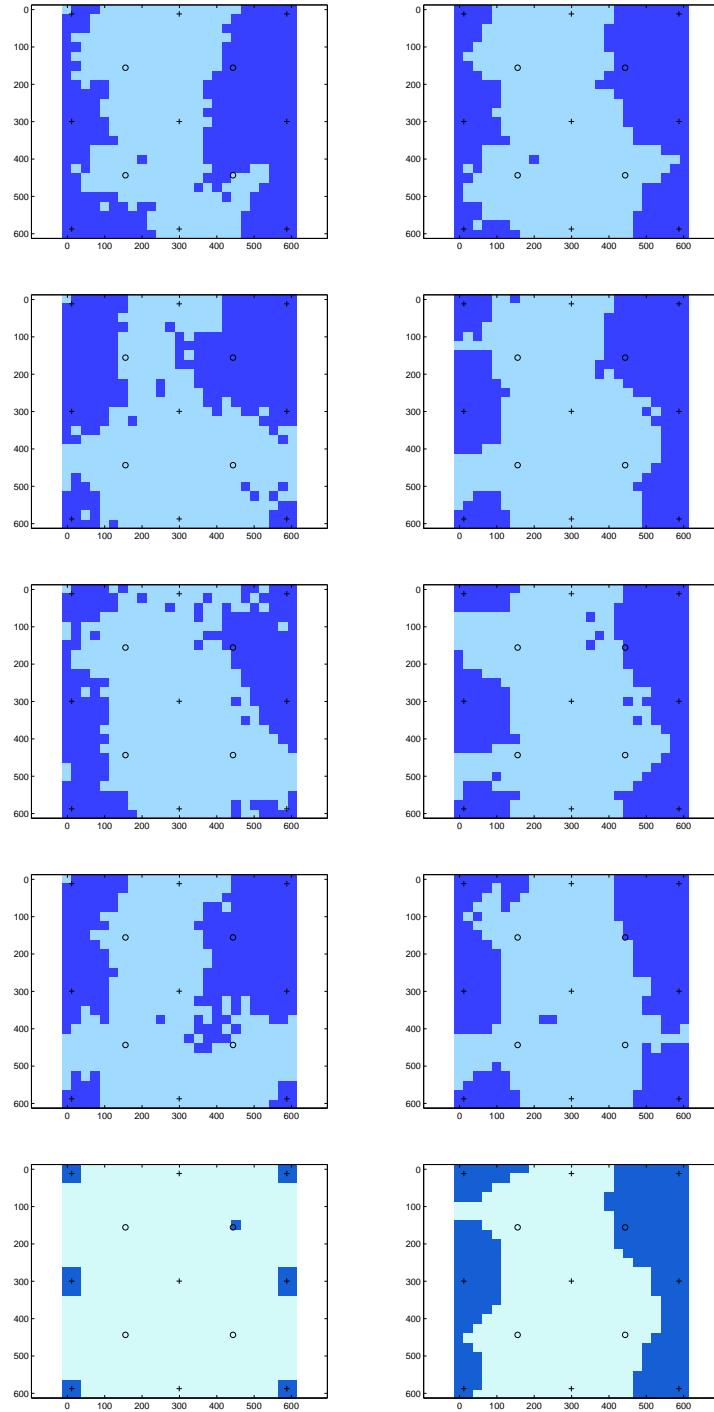


Figura 2.9: Reconstrucciones usando las inicializaciones estocásticas 6-10. Columna izquierda: desde arriba hacia abajo inicializaciones gaussianas (6,7,8,9 y determinística). Columna derecha: desde arriba hacia abajo reconstrucciones finales (6,7,8,9 y determinística).

2. (2005) December 10-13, Geological shape characterization for reservoirs using a level set method on production data, (with R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan, F. J. Mustieles, presented by O. Dorn) SPE/EAGE Reservoir Characterization and Simulation Symposium Overcoming Today s Challenges in Field Development, Dubai, U.A.E.

Capítulo 3

Reconstrucción Simultánea de Formas y Valores de Permeabilidad

En esta parte del trabajo se presenta un método de ajuste histórico automático que permite identificar formas geológicas y valores de permeabilidad simultáneamente a partir de los datos de producción. Aplicamos la metodología a un modelo de flujo bifásico incompresible [146, 147].

Este capítulo presenta los resultados de dos modelos, para la caracterización y optimización del ajuste histórico de estos yacimientos con dos litofacies con valores de permeabilidad bien diferenciadas, a partir del método de conjunto de nivel. El problema considerado aquí es agua desplazando petróleo a partir de varios pozos de inyección.

En el capítulo 2 se ha presentado un método novedoso para modelar y reconstruir formas geológicas en yacimientos a partir de los datos de producción. Este método es basado en la representación de las formas a partir de la función conjunto de nivel. En el capítulo 2 se asume que la distribución de permeabilidad en diferentes regiones del yacimiento no varía significativamente para poder ser aproximada a un valor constante el cual se asumió conocido a partir de información previa del yacimiento. Con el objetivo de resolver situaciones más realistas, en esta parte del trabajo se presenta una extensión del método con la finalidad de describir al mismo tiempo las formas de las diferentes regiones geológicas y la variación de la permeabilidad en cada una de las regiones.

En este esquema extendido, en cada paso de la técnica de reconstrucción,

los datos de producción son usados para calcular una corrección para la forma de las dos litofacies y al mismo tiempo una corrección basada en la técnica de corrección celda a celda para cada región. Solo una simulación directa de flujo bifásico y una simulación del modelo adjunto son necesarias para calcular ambas correcciones, la actualización de la función conjunto de nivel y de la permeabilidad.

En este capítulo se presentan resultados numéricos en dos dimensiones para situaciones realistas. Se muestra que el método es capaz de reconstruir 2 litofacies con formas complicadas y la correspondiente distribución de permeabilidad simultáneamente a partir de los datos de producción. La permeabilidad de la lutita está entre 250 y 500 milli-Darcy (mD), y la permeabilidad de la zona de arena está entre 900 y 1300 mD. Esto significa que hay un alto contraste entre dos regiones. Las incógnitas en este ejemplo son la topología de las regiones de arena y lutita y los valores de permeabilidad en cada celda. Estas incógnitas serán reconstruidas usando los datos de producción.

La reconstrucción es basada en la evolución artificial de una función de conjunto de nivel que representa las formas desconocidas, y la permeabilidad dentro de cada región es estimada usando un esquema de corrección de valor en cada celda. Ambas correcciones (forma y valor) son aplicadas simultáneamente en cada iteración usando los resultados de una simulación del modelo directo y simulación del modelo adjunto, disminuyendo el funcional de coste. En este capítulo también se comparan, para un caso representativo, los resultados obtenidos usando nuestro esquema combinado de forma y valor con el esquema adjunto presentado en trabajos previos [60].

3.1. Reconstrucción de valores de permeabilidad y forma.

La función de permeabilidad en este enfoque de reconstrucción de forma y valor en la celda, es definida como:

$$K = \begin{cases} K_i(x, y) & \text{en } D \\ K_e(x, y) & \text{en } \Omega \setminus D. \end{cases} \quad (3.1)$$

donde la región D , representa una de las dos litofacies presentes en el yacimiento y usualmente consiste de varias regiones disjuntas. En las situaciones que se

describen en este capítulo se identifica la distribución de las formas geológicas de ambas litofacies (dentro y fuera de D). Las distribuciones de permeabilidad en cada región que se estudian en este capítulo contienen variaciones suaves. La variación de permeabilidad dentro de la primera litofacie se representa como K_i y dentro de la segunda litofacie K_e . Las incógnitas son las formas geológicas de estas dos litofacies, así como también los valores de permeabilidad K_i y K_e a lo largo del yacimiento. El esquema de reconstrucción implementado aquí consiste en dos partes. Durante la primera parte, se asume que los valores de permeabilidad K_i y K_e pueden ser aproximados por dos valores promedios desconocidos, los cuales son estimados junto con la geometría de las formas, con el objetivo de satisfacer los datos de producción. El procedimiento comienza con una primera aproximación de la distribución de permeabilidad, que está basada en la información previa en las localizaciones de los pozos. Esta distribución es representada en una malla de $N_x \times N_y$ elementos. A partir de este mapa inicial de permeabilidad, el algoritmo estima una serie de formas y valores promedios dentro de cada litofacie tal que se mejora el ajuste de los datos de producción. Para definir la región D a través de la función de conjunto de nivel se introduce una función suficientemente suave $\psi(x, y)$ tal que:

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} K_i(x, y), & \text{si } \psi(x, y) \leq 0 \\ K_e(x, y), & \text{si } \psi(x, y) > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

En nuestra aplicación, para cada función conjunto de nivel $\psi(x, y)$ hay una o varias regiones D donde $\psi(x, y) < 0$, ya que al menos alrededor de los pozos los signos de los valores de la función conjunto de nivel son fijos. Sin embargo, las zonas D pueden estar asociadas con diferentes funciones de conjunto de nivel con esta propiedad. La frontera de D (señalada como $\Gamma = \partial D$) contiene las celdas donde $\psi = 0$, lo que se llama conjunto de nivel cero de la función conjunto de nivel ψ . Para resolver el problema de reconstrucción de formas, se aplica un enfoque de evolución en el tiempo. Usando una función de Heaviside en una dimensión H

$$H(\psi) = \begin{cases} 0, & \text{si } \psi(x, y) \leq 0 \\ 1, & \text{si } \psi(x, y) > 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

así, se puede escribir la permeabilidad del yacimiento en la forma:

$$K(\psi) = K_e H(\psi) + K_i (1 - H(\psi)). \quad (3.4)$$

En la primera parte del algoritmo, los símbolos K_i y K_e representan valores promedios de las permeabilidades dentro de las dos regiones, mientras que en la segunda parte representan funciones con variaciones suaves. Con el objetivo de obtener la evolución general de las incógnitas (ψ , K_i y K_e) se consideran las siguientes tres ecuaciones generales de evolución para la función conjunto de nivel y para las distribuciones de los dos parámetros

$$\frac{d\psi}{dt} = f(\vec{x}, t, \psi, \mathcal{R}) \quad (3.5)$$

$$\frac{dK_i}{dt} = h_i(\vec{x}, t, \psi, \mathcal{R}) \quad (3.6)$$

$$\frac{dK_e}{dt} = h_e(\vec{x}, t, \psi, \mathcal{R}) . \quad (3.7)$$

El objetivo es definir los términos desconocidos f , h_i y h_e tal que la diferencia entre los datos de producción reales y los simulados disminuye durante la evolución. Para este propósito, se define el funcional de coste \mathcal{J} que dependerá de las tres funciones anteriormente mencionadas

$$\mathcal{J}(\psi, K_i, K_e) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(\psi, K_i, K_e)\|^2, \quad (3.8)$$

donde:

$$\mathcal{R}(\psi, K_i, K_e) = Q_w - \tilde{Q} . \quad (3.9)$$

Es la diferencia entre los datos de producción simulados para los valores actuales de ψ, K_i y K_e y los datos de producción real ($g_j - \tilde{g}$) . La derivada formal del funcional de coste con respecto a la variable tiempo (artificial) se obtiene aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial K_i} \frac{dK_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial K_e} \frac{dK_e}{dt} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \left(\frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial K}{\partial K_i} \frac{dK_i}{dt} + \frac{\partial K}{\partial K_e} \frac{dK_e}{dt} \right) dx . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aquí la expresión $\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)$ es el gradiente tipo Fréchet (que contiene las sensibilidades de los datos con respecto a los parámetros) aplicado al ajuste

más reciente en los datos. Esto puede ser calculado eficientemente usando un esquema adjunto. Los componentes individuales de esta expresión pueden ser identificados como:

$$\frac{dK}{d\psi} = (K_i - K_e)\delta(\psi) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial K}{\partial K_i} = 1 - H(\psi) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial K}{\partial K_e} = H(\psi). \quad (3.13)$$

Aquí se expresa la función delta $\delta(\psi)$ como la derivada de la función de Heaviside en una dimensión y que en la siguiente selección es sustituida por la función de bandas χ_Γ . Así, se seleccionan las direcciones de descenso para el funcional de coste como:

$$f_{\text{SD}}(\mathbf{x}) = -C_1\chi_\Gamma(\psi)(K_e - K_i)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K) \quad (3.14)$$

$$h_{\text{iSD}}(x, t) = -C_2(1 - H(\psi))\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K) \quad (3.15)$$

$$h_{\text{eSD}}(x, t) = -C_3H(\psi)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K). \quad (3.16)$$

La comprobación de que es una dirección de descenso puede ser verificada sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.10) para $\frac{d\mathcal{J}}{dt}$. Aquí, C_1, C_2, C_3 son constantes positivas que modifican la velocidad de la evolución. En este capítulo se llaman a estas velocidades, velocidades de mayor descenso del funcional de coste.

Numéricamente, discretizando (3.11), (3.12) y (3.13) usando diferencias finitas adelantadas con paso de tiempo $\tau > 0$ para un tiempo t , se obtiene:

$$\frac{\psi(t + \tau) - \psi(t)}{\tau} = -C_1(K_e - K_i)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K)\chi_\Gamma(\psi) \quad (3.17)$$

$$\frac{K_i(t + \tau) - K_i(t)}{\tau} = -C_2(1 - H(\psi))\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K) \quad (3.18)$$

$$\frac{K_e(t + \tau) - K_e(t)}{\tau} = -C_3H(\psi)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K). \quad (3.19)$$

3.1.1. Formulación matemática

Durante la primera parte del algoritmo de reconstrucción de formas se trata de estimar los valores promedios del perfil de permeabilidad en cada región. El refinamiento de estos perfiles serán parte de la segunda etapa del esquema que se presenta en este capítulo, donde un enfoque general de reconstrucción de celda por celda se aplica una vez encontradas las formas y los promedios de los valores de permeabilidad. En esta primera parte de la metodología la función de permeabilidad en cada región será reemplazada por algún valor promedio, tal que este valor no depende de la localización dentro de cada zona. Así en esta primera parte se pueden simplificar las expresiones de las velocidades de mayor descenso del funcional de coste como:

$$\begin{aligned} K_i(\vec{x}, t) &= \hat{K}_i(t) \\ K_e(\vec{x}, t) &= \hat{K}_e(t). \end{aligned} \quad (3.20)$$

En lugar de buscar dK/dt , en esta parte del algoritmo se buscan leyes de evolución que describan los valores de \hat{K}_e y \hat{K}_i :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{K}_e}{dt} &= \hat{h}_e(t) \\ \frac{d\hat{K}_i}{dt} &= \hat{h}_i(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Introduciendo estas fórmulas en la ecuación (3.10) para $d\mathcal{J}/dt$ se obtienen las expresiones que garantizan una dirección de descenso de funcional de coste con respecto a estas cantidades:

$$\hat{h}_{iSD}(t) = -C_4 \int_{\Omega} (1 - H(\psi)) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx \quad (3.22)$$

$$\hat{h}_{eSD}(t) = -C_5 \int_{\Omega} H(\psi) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx. \quad (3.23)$$

En la primera parte del algoritmo, para el cálculo de los valores promedios, la discretización en el tiempo se puede escribir como:

$$\frac{K_i(t + \tau) - K_i(t)}{\tau} = -C_4 (1 - H(\psi)) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad (3.24)$$

$$\frac{K_e(t + \tau) - K_e(t)}{\tau} = -C_5 H(\psi) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K). \quad (3.25)$$

Con la finalidad de escribir una ley de evolución para las funciones de interés, se interpreta $\psi^{n+1} = \psi(t + \tau)$ y $\psi^n = \psi(t)$. Por lo tanto, durante la primera parte del enfoque combinado se plantean las evoluciones durante el proceso iterativo de la siguiente manera:

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \tau^n \delta\psi^n \quad (3.26)$$

$$\hat{K}_i^{n+1} = \hat{K}_i^n + \tau^n \delta\hat{K}_i^n \quad (3.27)$$

$$\hat{K}_e^{n+1} = \hat{K}_e^n + \tau^n \delta\hat{K}_e^n. \quad (3.28)$$

con

$$\delta\psi^n = -C_1 \chi_\Gamma(K_e - K_i) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad (3.29)$$

$$\delta\hat{K}_i^n = \hat{h}_{iSD}$$

$$\delta\hat{K}_e^n = \hat{h}_{eSD}.$$

En la segunda parte se obtienen las expresiones correspondientes usando (3.17), (3.20) y (3.19), donde en el caso de los primeros ejemplos de este capítulo $C_1 = 0$. Ambas etapas del proceso de reconstrucción corresponden a direcciones de descenso del funcional de coste.

3.1.2. Algoritmo

El algoritmo resultante presenta un proceso iterativo para reconstrucción de formas usando el método presentado en este capítulo y que combina la función conjunto de nivel con correcciones del valor en cada celda. El proceso es descrito a continuación:

PARTE I. Descripción de formas y estimación de valores de permeabilidad promedios

INICIALIZACIÓN: Se describe a partir de una función conjunto de nivel inicial.

PROCESO ITERATIVO:

1) Usar el simulador directo (IMPES en los casos presentados en este capítulo) sobre el último mapa de permeabilidad, al que corresponden los parámetros \hat{K}_e^n , \hat{K}_i^n y ψ^n para las formas geológicas. Las formas corresponden a D^n con frontera Γ^n y el vector resultante contiene los datos de producción simulados Q_w . Así se calculan los residuos usando la ecuación (3.9).

- 2) Resolver el problema adjunto, el cual permite calcular $\delta K = \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)$
- 3) Construir y aplicar la función de bandas χ_Γ^n , la cual es una matriz con valores igual a uno en los alrededores de las fronteras Γ^n y ceros en el resto del dominio. Esto aproxima la función delta de Dirac $\delta(\psi)$. Usar las ecuaciones (3.22) y (3.23) para calcular:

$$\begin{aligned}\delta\psi^n &= -(K_e - K_i)\chi_\Gamma^n \delta K^n \\ \delta\hat{K}_i^n &= \hat{h}_{iSD} \\ \delta\hat{K}_e^n &= \hat{h}_{eSD}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

- 4) Aplicar las correcciones, ecuaciones (3.26), (3.27) y (3.28).
- 5) Verificar el criterio de parada para esta parte. Si no se satisface ir al paso 1 con $n = n + 1$ y continuar desde allí, usando la corrección de las formas y los valores de permeabilidad para encontrar una nueva tendencia.

PARTE II. Corrección de los valores en cada celda

Esta segunda parte comienza una vez obtenidas las formas geológicas y los valores de permeabilidad promedio que satisfacen el criterio de parada de la parte I. En esta parte se aplica el esquema adjunto para encontrar la distribución de permeabilidad variable dentro de cada litofacie.

PROCESO ITERATIVO:

- 6) Usar el simulador directo y el adjunto para calcular las correcciones de los valores de permeabilidad en cada zona:

$$K_i^{n+1} = K_i^n + \tau^n \delta K_i^n \tag{3.31}$$

$$K_e^{n+1} = K_e^n + \tau^n \delta K_e^n \tag{3.32}$$

usando las selecciones $\delta\psi^n = 0$, $\delta K_i^n = h_{iSD}$ y $\delta K_e^n = h_{eSD}$.

- 7) Calcular el residuo y verificar el criterio de parada. Si no es alcanzado, regresar al paso 6 con $n = n + 1$ y continuar desde aquí.

3.1.3. Ejemplos numéricos

Con el objetivo de verificar el comportamiento del algoritmo de inversión combinado de búsqueda de formas y valores de permeabilidad en cada celda para un yacimiento con dos litofacies, se estudian dos ejemplos numéricos. Los ejemplos son modelos sintéticos pero realistas. En el primer ejemplo se investiga el comportamiento del esquema adjunto tradicional sin usar la función conjunto de nivel. En el segundo ejemplo se aplica la parte I del

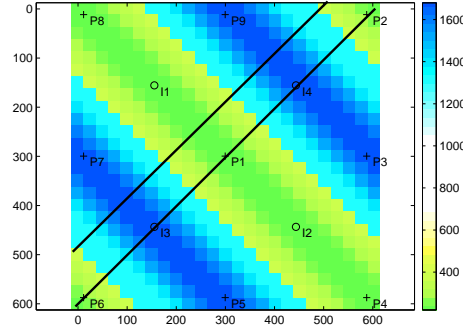


Figura 3.1: Reconstrucción de formas y valores. Permeabilidad real o de referencia para los experimentos, caso 7.1 y caso 7.2. Pozos de inyección son indicados por círculos (\circ), pozos de producción indicados con signo positivo (+).

algoritmo de la metodología deseada. La metodología desarrollada aquí combina la función conjunto de nivel con la técnica de corrección en cada celda aplicando el esquema adjunto.

El modelo de referencia o real es un modelo en dos dimensiones, con 9 pozos de producción y 4 de inyección distribuidos en un yacimiento con los datos expuestos en el capítulo 3. En el yacimiento existen dos litofacies, arena y lutita. La permeabilidad medida en 7 pozos indica la presencia de lutita (pozos P8, I1, P1, I2, P4, P6, P2) con valor de permeabilidad alrededor de 200 mD. Sin embargo, los valores de permeabilidad dentro de esta litofacie se consideran de naturaleza variable. Por otro lado, la permeabilidad medida en las posiciones del resto de los pozos (P7, I3, P5, P9, I4, P3) indican la presencia de una zona de arena con permeabilidad alrededor de 1700 mD. El modelo de referencia o real es mostrado en la figura 3.1.

En la figura 3.2 se observan las secciones transversales de la permeabilidad real o de referencia a lo largo de la diagonal principal y de la diagonal superior a la principal mostradas en la figura 3.1. Como se puede observar a partir del análisis de estas figuras (3.1 y 3.2) existe contraste entre los valores de permeabilidad de las dos regiones (la herramienta de dibujo utilizada para generar las secciones transversales no permite representar correctamente el salto en los valores de permeabilidad de una zona a otra). En esta sección todos los parámetros del yacimientos son asumidos conocidos, excepto las

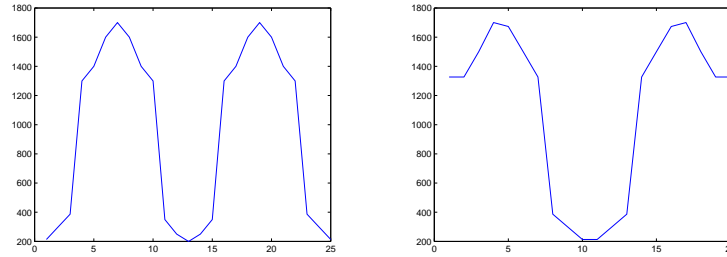


Figura 3.2: Secciones transversales distribución de permeabilidad real o de referencia. Izquierda: Sección transversal de la permeabilidad (mD) a lo largo de la diagonal principal. Derecha: Sección transversal de la permeabilidad (mD) a lo largo de la diagonal superior.

estructuras de las litofacies y los valores de permeabilidad, los cuales necesitan ser reconstruidos a partir de los datos de producción. Al igual que en la sección anterior hay dos fluidos incompresibles en el yacimiento (agua y petróleo) y se simula el mismo proceso de inyección de agua.

En el primer experimento numérico que se aplica en esta sección para tratar de reconstruir la distribución de permeabilidad mostrada en la figura 3.1 se usa el esquema del operador adjunto para la corrección de la permeabilidad en cada celda en un proceso de ajuste histórico de producción automático, como el desarrollado en [60]. Los resultados obtenidos aplicando esta técnica tradicional se muestran en la figura 3.3. En la primera fila se puede observar la reconstrucción final (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha) después de 60 iteraciones, el cual presenta un mínimo local. En la segunda fila se presenta la inicialización (izquierda) con valor constante del valor de la litofacie arena (1000 mD) excepto en las localizaciones de los pozos donde se coloca el valor medido en el pozo y del que normalmente se dispone en aplicaciones de campo. En la figura inferior derecha se presenta el ajuste de producción de agua para los 120 días de actividad del yacimiento. La línea roja es la producción correspondiente a la inicialización, la línea oscura continua es la producción correspondiente a la reconstrucción final y la línea oscura discontinua corresponde a la producción real o de referencia. Obsérvese que con el modelo de reconstrucción en cada celda aplicado en este ejemplo requiere una inicialización casi constante para garantizar la estabilidad del método y no se reconstruyen las fronteras adecuadamente (ver [60]), mientras que el método de conjunto de nivel es más robusto con respecto a

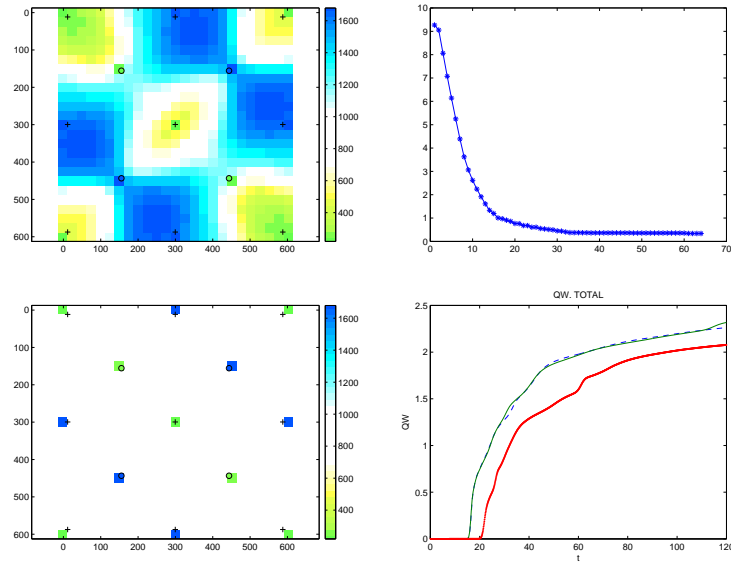


Figura 3.3: Reconstrucción de formas y valores. Primer ejemplo numérico, reconstrucción tradicional basada en el modelo adjunto en cada celda. Superior izquierda: reconstrucción final; superior derecha: evolución del funcional de coste; inferior izquierda: inicialización; inferior derecha: ajuste de la tasa de producción de agua.

la inicialización.

El segundo ejemplo numérico que se presenta en este capítulo usa el mismo modelo real o de referencia mostrado en la figura 3.1. Según el algoritmo expuesto anteriormente el proceso de reconstrucción consiste en dos partes. En la primera parte se evolucionan las formas geológicas y el valor promedio de permeabilidad en cada litofacie. La inicialización se basa en dos zonas, lutita y arena con valores promedios 300 mD y 1500 mD respectivamente y se le asigna una función conjunto de nivel inicial que viene dada por una función distancia con signo. La distribución de permeabilidad se asume constante en cada litofacie y los valores cambian en cada iteración de esta primera etapa como se presenta en la figura 3.4. A la izquierda se muestra la evolución de los valores de permeabilidad en la zona de lutita y a la derecha se presenta la evolución de los valores en la zona de arena. En la figura 3.5 se puede observar la evolución de las formas para las iteraciones 20, 40, 80, 200, 300, 400, 600 y 800. En esta primera etapa se corrigen la función conjunto de nivel

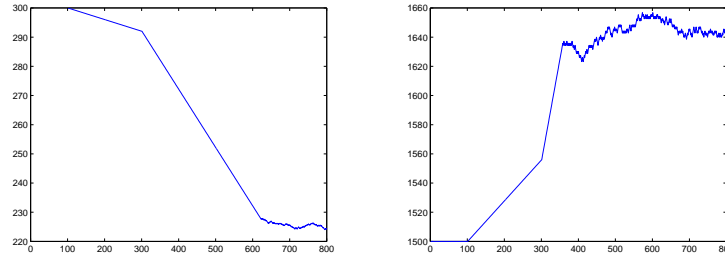


Figura 3.4: Evolución de los valores promedios de permeabilidad durante la primera etapa. Izquierda: lutita. Derecha: arena

y los valores de permeabilidad promedio en cada iteración. Para la evolución de la función conjunto de nivel se usa un criterio de paso máximo de 4 celdas que cambian de valor de permeabilidad y el paso se establece con una técnica de selección del paso. La evolución de los valores de permeabilidad promedio estimados siguen un criterio de selección del paso con un criterio que depende del valor en la litofacie. Este procedimiento es repetido hasta que el ajuste de los datos ha alcanzado un valor pequeño pre-definido. Sin embargo, es conocido que el esquema de reconstrucción iterativo frecuentemente muestra un comportamiento semi-convergente si se aplica a datos con ruido. Esto indica que en lugar de esperar que la primera parte del algoritmo encuentre un valor de funcional de coste muy pequeño, es aconsejable que comenzar la segunda parte del algoritmo con una forma intermedia que representa mejor la información geológica previa de la que se dispone en el yacimiento.

Es este ejemplo se han seleccionado las reconstrucciones de las iteraciones 400 y 800 para inicializar la segunda etapa del algoritmo. Así la primera inicialización de la segunda etapa corresponderá a la reconstrucción obtenida en la iteración 400 de la primera etapa y la segunda inicialización de la segunda etapa corresponderá a la reconstrucción obtenida en la iteración 800 de la primera etapa. Este criterio es consistente con la naturaleza de no unicidad de solución que se maneja en problemas inversos. Los resultados obtenidos en la segunda etapa usando las dos inicializaciones mencionadas anteriormente se exponen en la figura 3.7, donde se puede observar la reconstrucción obtenida a partir de la primera inicialización y la evolución del funcional de coste desde la primera etapa en la primera fila. En la segunda fila se muestra la reconstrucción obtenida a partir de la segunda inicialización y la evolución del funcional de coste desde la primera etapa. En la tercera fila se observa

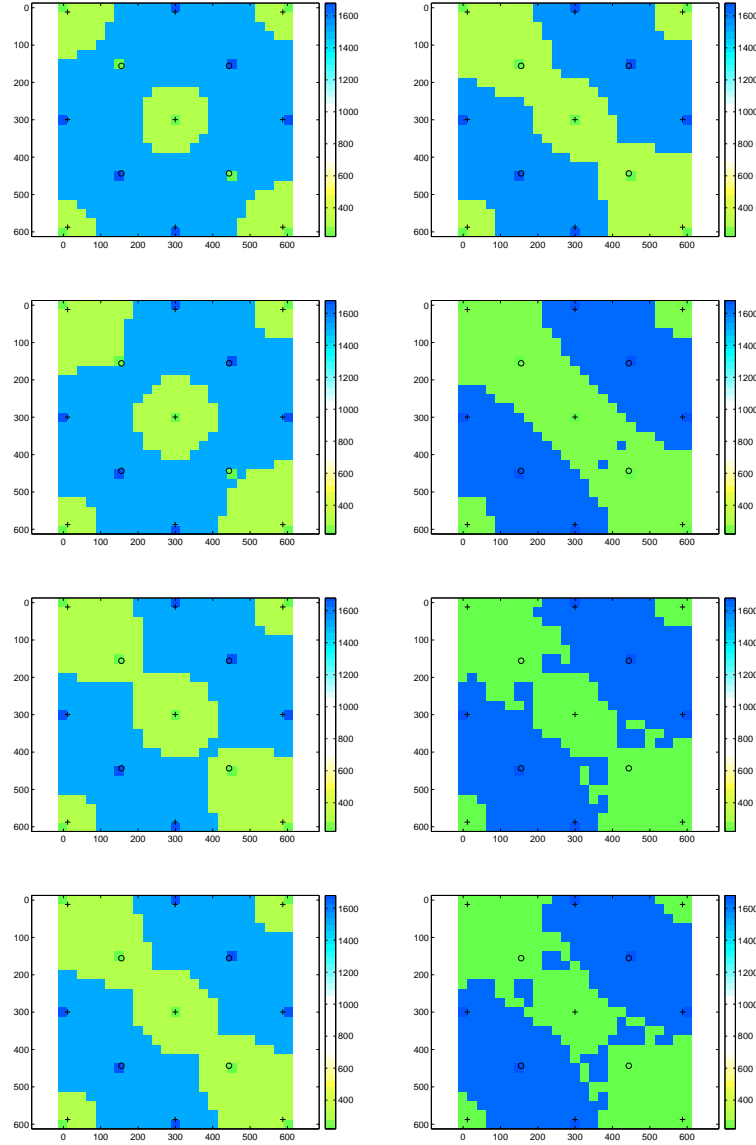


Figura 3.5: Reconstrucción de formas y valores, segundo ejemplo, evolución de la permeabilidad durante la primera etapa del proceso de reconstrucción de la técnica combinada. Columna izquierda desde arriba hacia abajo: después de 20,40,80 y 200 iteraciones. Columna derecha desde arriba hacia abajo: después de 300,400,600 y 800 iteraciones.

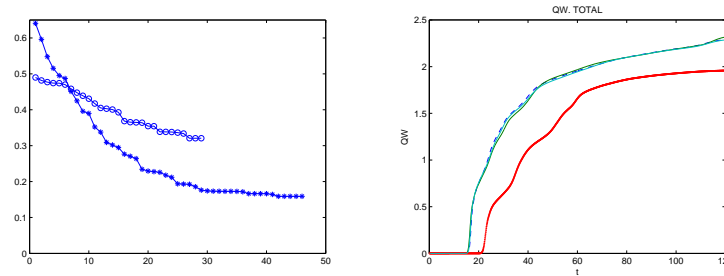


Figura 3.6: Reconstrucción de formas y valores. Segundo ejemplo numérico, segunda etapa. Izquierda: Evolución del funcional de coste en la segunda etapa, primera inicialización (asterisco); segunda inicialización (círculos). Derecha: Ajuste de la tasa de producción.

el ajuste de los valores de permeabilidad obtenidos a lo largo de la diagonal principal (izquierda) y la diagonal superior (derecha). La línea continua corresponde al perfil correspondiente a la distribución real o de referencia, la línea roja corresponde a la solución usando la primera inicialización y la línea azul punteada corresponde a la solución a partir de la segunda inicialización. Las inicializaciones de la segunda etapa corresponden a dos formas diferentes donde la primera inicialización tiene valores de permeabilidad promedio de 270 mD (lutita) y 1625 mD (arena), la segunda inicialización usa la forma de la imagen inferior derecha de la figura 3.7 con valores de permeabilidad de 225 mD para la zona de lutita y 1645 mD para la zona de arena. Esta segunda inicialización representa una forma fragmentada del yacimiento que pudiese no estar de acuerdo con la interpretación geológica previa del yacimiento. Por otra parte la primera inicialización representa una estructura de canal claramente definida, lo que pudiese cumplir las expectativas de la interpretación geológica previa. La figura 3.6 muestra a la izquierda la evolución del funcional de coste en la segunda etapa del proceso de reconstrucción. Como se puede observar la primera inicialización produce un coste final menor (asterisco) que el de la segunda inicialización (círculos). En la figura de la derecha se muestra el ajuste de la tasa de producción. El comportamiento de las tendencias de las dos inicialización parecen sobrepuestas, por lo que no se evidencia gran diferencia entre ellas.

En esta sección se ha presentado una nueva metodología que es capaz de reconstruir la forma y la distribución de permeabilidad interna de un yacimiento con dos litofacies. El algoritmo ha sido exitosamente aplicado en

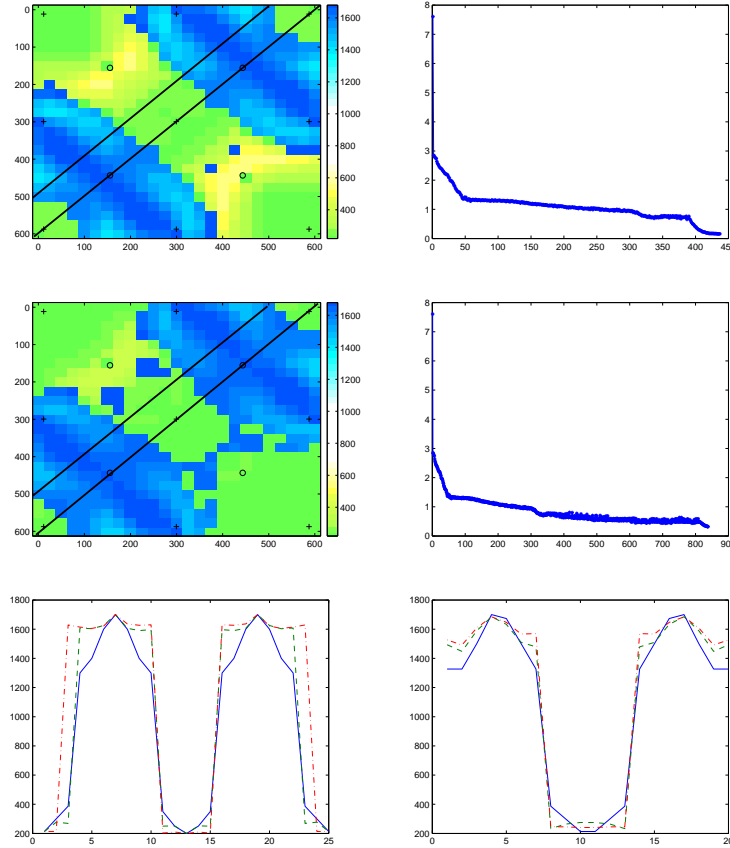


Figura 3.7: Evolución de formas y valores. Segundo ejemplo numérico, segunda etapa. Segundo ejemplo numérico, segunda etapa. Primera fila: reconstrucción final (izquierda) y evolución del funcional de coste (derecha) obtenidos a partir de la primera inicialización (iteración 400 primera etapa). Segunda fila: reconstrucción final (izquierda) y evolución del funcional de coste (derecha) obtenidos a partir de la segunda inicialización (iteración 800 primera etapa). Tercera fila: Ajuste de la sección transversal de la permeabilidad (mD) a lo largo de la diagonal principal (izquierda). Ajuste de la sección transversal de la permeabilidad (mD) a lo largo de la diagonal superior (derecha)

ejemplos sintéticos pero realistas dentro de un proceso de ajuste histórico de producción automático a partir de los datos de producción usando un modelo de inyección de agua asociado a flujo bifásico incompresible. Este método usa una combinación de la representación de la función conjunto de nivel para las formas y el esquema adjunto para calcular las direcciones del gradiente. Solo una simulación del modelo directo y del adjunto son necesarias para calcular las direcciones del gradiente con respecto al valor de la permeabilidad en cada celda y la localización de las fronteras de las formas geológicas. Los cambios estructurales de las regiones geológicas se generan de forma automática con esta metodología. En esta sección se han presentado dos estrategias para generar las reconstrucciones. En una situación real la selección de la estrategia mas apropiada dependerá de los detalles del yacimiento, en particular de la interpretación geológica previa. Esa metodología trata de complementar el método de reconstrucción celda a celda presentada en [60, 30] en situaciones donde se conoce de la existencia de más de un tipo de roca en el yacimiento y donde se dispone de datos de producción.

3.2. Estimación simultánea de forma y perfil parametrizado

En muchas aplicaciones de simulación numérica de yacimientos, el ingeniero tiene una idea de la tendencia que se espera obtener de un parámetro dado, por ejemplo basada en la tendencia de la información en los pozos. Por ello en esta sección se presenta un esquema novedoso para la identificación automática de las regiones geológicas, y simultáneamente la caracterización de los perfiles de permeabilidad con tendencias lineales suaves dentro de cada región. En contraste con el método presentado hasta el momento donde la distribución de permeabilidad dentro de cada zona se describe usando el método adjunto en cada celda, en esta parte se describen los valores internos de permeabilidad usando funciones bases. La selección de las funciones bases dependerá de la información geológica previa disponible en el yacimiento, donde se puede estimar el tipo de tendencias existentes. Así con el objetivo de incorporar las tendencias de permeabilidad detectadas a partir de información geológica previa, en esta parte se hace uso de las funciones bases que representan el tipo de tendencia esperada [93]. En particular en esta sección se estudiará el caso donde existe más de una litofacie en el yacimiento, así se

combina la evolución de las funciones bases con la evolución de la función conjunto de nivel presentada en capítulos anteriores. En cada paso de la nueva técnica de reconstrucción que se presenta aquí, los datos de producción son utilizados con el objetivo de calcular la corrección para las formas de las litofacies al mismo tiempo que la corrección del perfil de permeabilidad parametrizado en cada región. La reconstrucción de las formas geológicas se realiza evolucionando la función conjunto de nivel, como en capítulos anteriores. El objetivo de esta parte del trabajo es como en apartados anteriores contar con un método de ajuste histórico de producción automático que minimiza el funcional de coste entre datos reales y simulados. En esta sección se presenta un ejemplo con un yacimiento con dos litofacies con tendencias aparentemente predefinidas sometido a un proceso de inyección de agua.

Para definir la región D que representa la distribución de permeabilidad de dos litofacies en el yacimiento, se usa el esquema presentado en las ecuaciones (3.1), (3.3) y (3.4) que involucra la función conjunto de nivel $\psi(x, y)$. Las incógnitas en este capítulo serán las formas geológicas presentes en el yacimiento y las distribuciones de permeabilidad K_e y K_i , en este caso parametrizadas según información previa. A partir del mapa de permeabilidad inicial, el algoritmo se divide en dos etapas. En cada iteración de la primera etapa se calculan correcciones de la forma y valores promedios de cada perfil de permeabilidad. Mientras que en cada iteración de la segunda etapa se calcula una serie de correcciones de las formas y de los parámetros que caracterizan cada distribución de permeabilidad, según las funciones bases predefinidas a partir del análisis geológico inicial de las tendencias de permeabilidad. Así se escribe la distribución de permeabilidad dentro de cada litofacie del yacimiento de la forma:

$$K_i(x, y) = \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_j a_j(x, y) \quad (3.33)$$

$$K_e(x, y) = \sum_{k=1}^{N_e} \beta_k b_k(x, y) .$$

donde las funciones a_j y b_k son las funciones bases seleccionadas para cada litofacie o parte del dominio D y $\Omega - D$. En esta aplicación del problema inverso se busca estimar la función conjunto de nivel ψ y los pesos α_j y β_k que satisface los datos de producción. Con el objetivo de obtener una ley de evolución artificial para $(\psi, \alpha_j$ y $\beta_k)$ se consideran las siguientes leyes de

evolución generales para la función conjunto de nivel y para las funciones peso:

$$\frac{d\psi}{dt} = f(\vec{x}, t, \psi, \mathcal{R}) \quad (3.34)$$

$$\frac{\alpha_j}{dt} = g_j(t, \psi, \mathcal{R}) \quad (3.35)$$

$$\frac{\beta_k}{dt} = h_k(t, \psi, \mathcal{R}) . \quad (3.36)$$

El objetivo es definir los términos desconocidos f , g_j y h_k tal que la diferencia entre los datos de producción simulados y los datos de producción reales disminuya. Para este propósito, se define el funcional de coste de forma análoga al capítulo anterior

$$\mathcal{J}(\psi, \alpha_j, \beta_k) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(\psi, \alpha_j, \beta_k)\|^2 , \quad (3.37)$$

donde α_j representa el conjunto de todos los parámetros de pesos para la región D y β_k representa el conjunto de los parámetros de pesos para la región $\Omega - D$. La función residuo R es dada por:

$$\mathcal{R}(\psi, \alpha_j, \beta_k) = Q_w - \tilde{Q} . \quad (3.38)$$

Es la diferencia entre los datos de producción reales y los datos de producción simulados para los valores actuales de ψ, α_j y β_k . La derivada formal del funcional de coste con respecto a la variable tiempo (artificial) se obtiene aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} + \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \alpha_j} \frac{d\alpha_j}{dt} + \sum_{k=1}^{N_e} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \beta_k} \frac{d\beta_k}{dt} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \left(\frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} + \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\partial K}{\partial \alpha_j} \frac{d\alpha_j}{dt} + \sum_{k=1}^{N_e} \frac{\partial K}{\partial \beta_k} \frac{d\beta_k}{dt} \right) dx \end{aligned} \quad (3.39)$$

Aquí la expresión $\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)$ es el gradiente tipo Fréchet (que contiene las sensibilidades de los datos con respecto a los parámetros) aplicado al ajuste

más reciente en los datos. Esto puede ser calculado eficientemente usando un esquema adjunto. Los componentes individuales de esta expresión pueden ser identificados como:

$$\frac{dK}{d\psi} = (K_i - K_e)\delta(\psi) \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_j} = a_j(x, y)(1 - H(\psi)) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_k} = b_k(x, y)H(\psi). \quad (3.42)$$

Aquí se expresa la función delta $\delta(\psi)$ como la derivada de la función de Heaviside en una dimensión. Así, se seleccionan las direcciones de descenso para el funcional de coste como:

$$f_{SD}(\mathbf{x}) = -C\chi_\Gamma(\psi)(K_e - K_i)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K) \quad (3.43)$$

$$g_{jSD}(t) = -C(\alpha_j) \int_{\Omega} \alpha_j(x, y)(1 - H(\psi))\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K)dx \quad (3.44)$$

$$h_{kSD}(t) = -C(\beta_k) \int_{\Omega} \beta_k(x, y)H(\psi)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K)dx, \quad (3.45)$$

donde $C(\psi)$, $C(\alpha_j)$ y $C(\beta_k)$ son constantes para definir la velocidad de evolución para cada incógnita ψ, α_j y β_k respectivamente. La propiedad de descenso puede ser verificada introduciendo estas ecuaciones en la ecuación (3.39). Discretizando numéricamente (3.34), (3.35), (3.36) usando el método de diferencias finitas hacia adelante se obtiene:

$$\frac{\psi(t + \tau) - \psi(t)}{\tau} = -C_1(K_e - K_i)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K)\chi_\Gamma(\psi) \quad (3.46)$$

$$\frac{\alpha_j(t + \tau) - \alpha_j(t)}{\tau} = -C_2 \int_D a_j(x, y)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K)dx dy \quad (3.47)$$

$$\frac{\beta_k(t + \tau) - \beta_k(t)}{\tau} = -C_3 \int_{\Omega-D} b_k(x, y)\mathcal{R}'(K)^*\mathcal{R}(K)dx dy. \quad (3.48)$$

3.2.1. Perfiles lineales ó constantes

En la primera parte del algoritmo de reconstrucción combinado aplicado en esta sección se estiman los valores de permeabilidad promedio en cada región. Lo que es equivalente a escoger una función base constante en cada región correspondiente a un perfil constante. El refinamiento de los perfiles de permeabilidad se aplica en la segunda etapa del proceso de reconstrucción, donde se usa más de una función base en cada región. En esta primera parte la función de permeabilidad se reemplaza por un valor promedio, tal que el mismo no depende de la localización dentro de la región que corresponda. Esta situación es representada por la selección de las siguientes funciones bases:

$$N_i = 1, a_1 = 1 \implies K_i(x, y) = \alpha_1. \quad (3.49)$$

$$N_e = 1, b_1 = 1 \implies K_e(x, y) = \beta_1. \quad (3.50)$$

De esta forma se pueden obtener los valores promedios de la primera etapa del proceso de reconstrucción. Siguiendo la regla de discretización en el tiempo e incluyendo $\psi^{n+1} = \psi(t + \tau)$ y $\psi^n = \psi(t)$, en las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) se obtiene:

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \tau^n \delta \psi^n \quad (3.51)$$

$$\alpha_1^{n+1} = \alpha_1^n + \tau^n \delta \alpha_1^n \quad (3.52)$$

$$\beta_1^{n+1} = \beta_1^n + \tau^n \delta \beta_1^n, \quad (3.53)$$

con

$$\delta \psi^n = -C_1 \chi_\Gamma(\psi)(K_e - K_i) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad (3.54)$$

$$\delta \alpha_1^n = -C_2 \int_D \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx dy \quad (3.55)$$

$$\delta \beta_1^n = -C_5 \int_{\Omega-D} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx dy. \quad (3.56)$$

En la segunda etapa de la estrategia presentada en esta sección se parametriza la distribución de permeabilidad en cada región (con un perfil lineal, en este caso). La inicialización de la forma (función conjunto de nivel) en esta etapa es la reconstrucción final de la primera etapa. En la primera iteración de la segunda etapa se aplica mínimos cuadrados en cada litofacie, a la forma

final de la primera etapa, debido a que el valor de permeabilidad de los pozos da evidencia de la tendencia lineal. El objetivo de este ajuste de mínimos cuadrados es obtener valores iniciales de los parámetros α_j y β_k en cada región. Utilizando el siguiente modelo

$$N_i = 1, a_1 = 1, a_2 = x, a_3 = y, \quad N_e = 3, b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = y, \quad (3.57)$$

$$\implies K_i(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad \implies K_e(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y,$$

y aplicando un procedimiento análogo a los anteriormente presentados, se obtienen las siguientes reglas de iteración:

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \tau^n \delta \psi^n, \quad (3.58)$$

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n + \tau^n \delta \alpha_j^n, \quad j=1,2,3 \quad (3.59)$$

$$\beta_j^{n+1} = \beta_j^n + \tau^n \delta \beta_j^n, \quad k=1,2,3 \quad (3.60)$$

Aquí $\delta \psi$ y $\delta \alpha_1$ y $\delta \beta_1$ están definidos anteriormente. Los nuevos términos son dados como:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_2^n &= -C_3 \int_D x \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx dy, & \delta \alpha_3^n &= -C_4 \int_D y \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx dy, \\ \delta \beta_2^n &= -C_6 \int_{\Omega-D} x \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx dy, & \delta \beta_3^n &= -C_7 \int_{\Omega-D} y \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) dx dy. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Los resultados para un ejemplo numérico (búsqueda de formas y valores promedios) se presentan en la figura 3.8 donde se busca encontrar el valor de la permeabilidad y las formas geológicas de este caso. En la primera fila de la figura 3.8 se puede observar la permeabilidad real o de referencia, con valores de permeabilidad 250 mD en la zona de lutita y 1500 mD en la zona de arena (izquierda). La permeabilidad inicial tiene valores de 300 mD para la zona de lutita y 1300 mD en la zona de arena. En la segunda fila se observa la reconstrucción final, con valores 269 mD en la zona de lutita y 1460 mD para la zona de arena (izquierda) y la evolución del funcional de coste durante el proceso de reconstrucción (derecha). En la tercera fila se observa la evolución de los valores de permeabilidad en ambas zonas. Se observa que se estabilizan durante las últimas iteraciones.

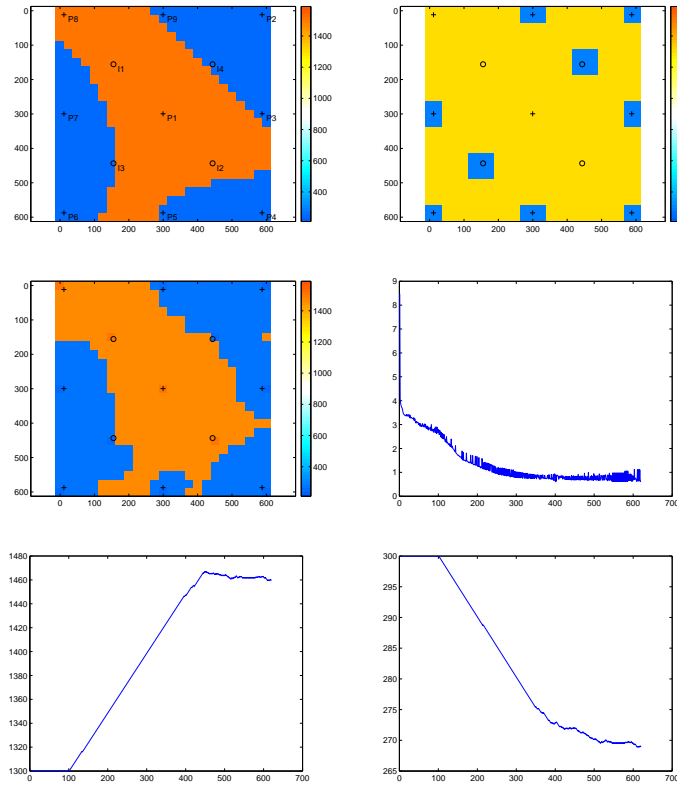


Figura 3.8: Reconstrucción de formas y valores. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha). Tercera fila: Evolución de la permeabilidad en la zona de arena (izquierda); evolución de la permeabilidad en la zona de lutita (derecha)

3.2.2. Ejemplos numéricos

Con el objetivo de verificar el comportamiento de la metodología planteada (evolución de la función conjunto de nivel y de los parámetros) en este capítulo se aplica este método a un yacimiento con dos litofacies, donde cada litofacie tiene un perfil de permeabilidad aproximadamente lineal. El ejemplo que se estudia en esta sección es sintético pero realístico. Se analizan los resultados generados aplicando la metodología desarrollada donde se combina la función conjunto de nivel con la técnica de parametrización del perfil de permeabilidad en cada región. Los datos generales del yacimiento fueron presentados previamente en el capítulo 3.

El ejemplo numérico que se presenta en esta sección, corresponde a la distribución de permeabilidad real o de referencia que se muestra en la primera fila de la figura 3.9 (izquierda). A la derecha se muestra la inicialización de la primera etapa. Como se puede observar en la distribución de permeabilidad real o de referencia existen dos litofacies claramente diferenciadas, cuyos valores de permeabilidad (mD) vienen dados por:

$$K_i(x, y) = 800 + 10 \frac{x}{\Delta x} + 10 \frac{y}{\Delta y} + 50 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{\Delta x} \frac{\pi}{15} \right) \quad (3.62)$$

$$K_e(x, y) = 200 + 5 \frac{x}{\Delta x} + 5 \frac{y}{\Delta y} + 20 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{\Delta x} \frac{\pi}{15} \right). \quad (3.63)$$

En la segunda fila de la figura 3.9 se muestra la reconstrucción final de la primera etapa (izquierda). A la derecha se puede observar la evolución del funcional de coste durante la primera etapa (400 iteraciones). En la tercera fila se observa la evolución de los valores de permeabilidad promedios en la zona de lutita (derecha) y en la zona de arena (izquierda).

En la figura 3.10 se presentan los resultados de la segunda etapa, donde se buscan los parámetros α_j y β_k y continua la evolución de la forma. En la primera fila de la figura 3.10 se muestra la permeabilidad real o de referencia a la izquierda. A la derecha se observa la inicialización de la segunda etapa, que corresponde a la forma de la reconstrucción final de la primera etapa después de aplicar mínimos cuadrados con los datos de los pozos (izquierda). En la segunda fila de la figura 3.10 se observa la reconstrucción final de la segunda etapa (izquierda) y la evolución del funcional de coste durante la primera y la segunda etapa. Como se puede observar en la iteración 400 hay un incremento del residuo, debido principalmente a la aplicación de mínimos cuadrados para inicializar los parámetros de la segunda etapa. En la tercera

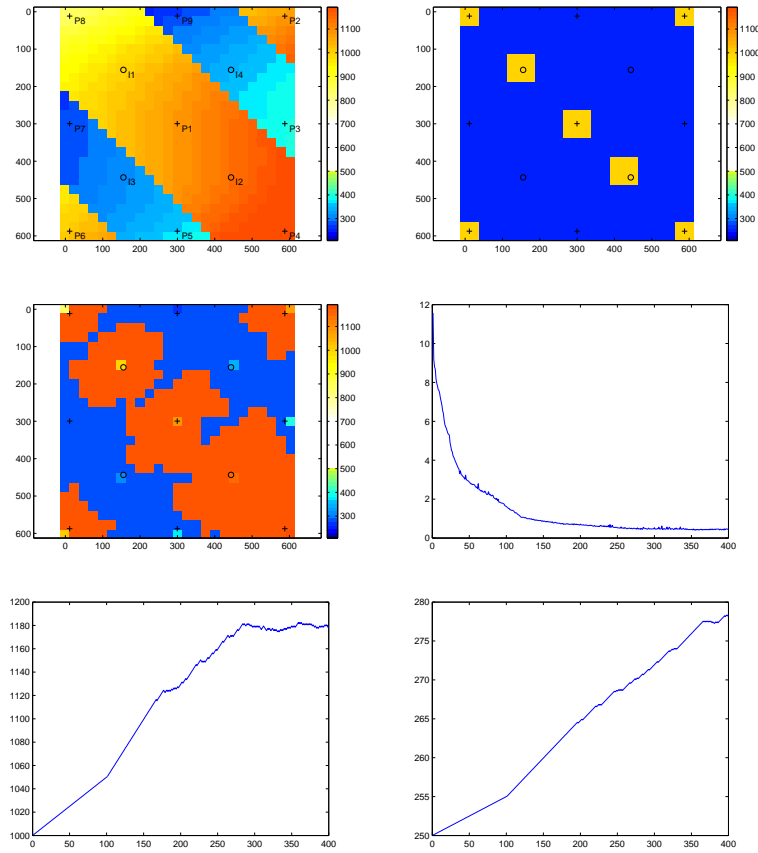


Figura 3.9: Formas geológicas y parametrización de la permeabilidad; primera etapa. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Reconstrucción final primera etapa (izquierda); evolución del funcional del coste (derecha). Tercera fila: Valores de permeabilidad promedio en la zona lutita (izquierda) y arena (derecha).

fila se observa la tendencia de los parámetros que caracterizan las zonas de lutita (izquierda). La línea roja corresponde a α_1 , y por otra parte α_2 y α_3 son representados por las líneas oscuras discontinuas y continua respectivamente. Para la zona de arena (figura derecha), la línea roja corresponde a β_1 , y por otra parte β_2 y β_3 son representados por las líneas oscuras discontinuas y continua respectivamente. Haciendo uso de las ecuaciones (3.51) y (3.31) se puede evaluar la fiabilidad de los parámetros obtenidos. Los valores de β_k correspondientes a la reconstrucción final son $\beta_1 = 260$, $\beta_2 = 3,6$ y $\beta_3 = 3,95$, los valores de α_j obtenidos de la reconstrucción final son $\alpha_1 = 811$, $\alpha_2 = 10$ y $\alpha_3 = 10,8$. Obsérvese que los parámetros de la reconstrucción final también intenta ajustar el factor seno expresado en el tercer término de las expresiones de la permeabilidad (3.62) y (3.63).

El método presentado en esta sección consiste en dos etapas que usan la evolución de la función conjunto de nivel para representar las formas. En la primera parte se buscan las formas geológicas, evolucionando la función conjunto de nivel y se estiman valores de permeabilidad promedio en cada litofacie. A la forma final de la primera etapa se le aplica mínimos cuadrados con los datos de los pozos, para obtener los parámetros iniciales de la segunda etapa. En la segunda etapa evolucionan las formas junto con los parámetros que representan la permeabilidad. Esta nueva metodología genera buenos estimados, no solo para las formas, sino también para los parámetros α_j y β_k .

3.3. Reconstrucción de formas y valores. Casos híbridos

Con el objetivo de investigar la flexibilidad y generalidad de los algoritmos de inversión de formas y valores usando el método de conjunto de nivel y el método adjunto presentados anteriormente, en esta sección se combinan estos algoritmos para la reconstrucción de casos híbridos, en un caso donde existen dos litofacies de diferente naturaleza (perfil de permeabilidad variable), donde un perfil muestra una tendencia lineal pero el otro no.

El caso estudiado tiene dos litofacies, una de ella con tendencia de permeabilidad lineal, por lo se reconstruye usando parametrización de los valores de permeabilidad. La otra litofacie es reconstruida usando la estrategia del operador adjunto en cada celda. En este caso se usan dos estrategias para

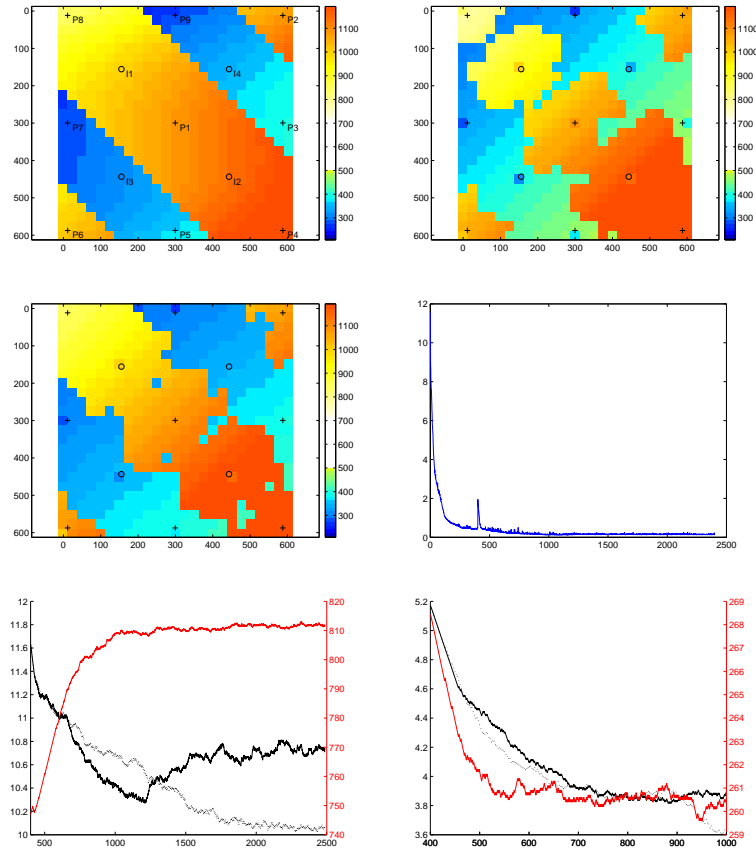


Figura 3.10: Formas geológicas y parametrización de la permeabilidad; segunda etapa, evolución de parámetros. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización de la segunda etapa (derecha). Segunda fila: Reconstrucción final segunda etapa (izquierda); evolución del funcional de coste durante toda la evolución (derecha). Tercera fila: evolución de los parámetros α_j (izquierda); β_k (derecha)

reconstruir el perfil de permeabilidad del yacimiento. En la primera estrategia se realiza la reconstrucción en cuatro etapas, y en la segunda estrategia se ajustan todas las variables desconocidas simultáneamente, formas y valores internos de ambas litofacies. Los detalles de los datos del modelo de simulación se encuentran en el capítulo de introducción.

3.3.1. Primera estrategia

Este ejemplo numérico describe una situación de 4 regiones distribuidas a lo largo del yacimiento, donde tres zonas corresponden a lutita. Ver figura 3.11, superior izquierda. Las zonas de lutita tienen tendencia de permeabilidad lineal con valores entre 250 y 500 mili-Darcy (mD), y la permeabilidad de la zona de arena está entre 900 y 1300 mD. La inicialización se muestra en la figura 3.11 superior derecha. La función conjunto de nivel inicial es la correspondiente función de distancia con signo la cual es calculada analíticamente. Para la inicialización se asume como criterio inicial que el yacimiento consiste de arena en aquellos lugares del yacimiento donde no se disponen de datos fuertes (puntos lejanos de los pozos). Comenzando con esta inicialización la primera estrategia se divide en cuatro etapas.

En la primera etapa se busca la forma y el valor promedio de la permeabilidad en ambas zonas como se muestra en la figura 3.11. Para la evolución de la función conjunto de nivel en cada iteración cambian de valor de permeabilidad un máximo de 5 celdas. La primera fila de la figura 3.11 muestra la forma real (izquierda) y la inicialización (derecha). En la segunda fila se muestra la reconstrucción final después de 700 iteraciones (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha). Se puede observar que el coste se ha estabilizado. En la tercera fila se presenta la evolución del valor de permeabilidad promedio en la zona de arena (izquierda) y la evolución del valor de permeabilidad promedio en la zona de lutita (derecha), cuyos valores también se han estabilizado.

En la segunda etapa se reconstruye el perfil de permeabilidad de la litofacie con distribución lineal (lutita) determinando los parámetros asociados (β_1, β_2 y β_3) y se puede observar que los valores de los parámetros se estabilizan, figura 3.12 inferior izquierda. El perfil de permeabilidad real correspondiente a la zona de lutita viene dado por los valores (β_1, β_2 y β_3).

En la primera fila de la figura 3.12 se puede observar la reconstrucción de la permeabilidad obtenida en esta segunda etapa (izquierda) y la inicialización de esta segunda etapa que corresponde a la final de la etapa I

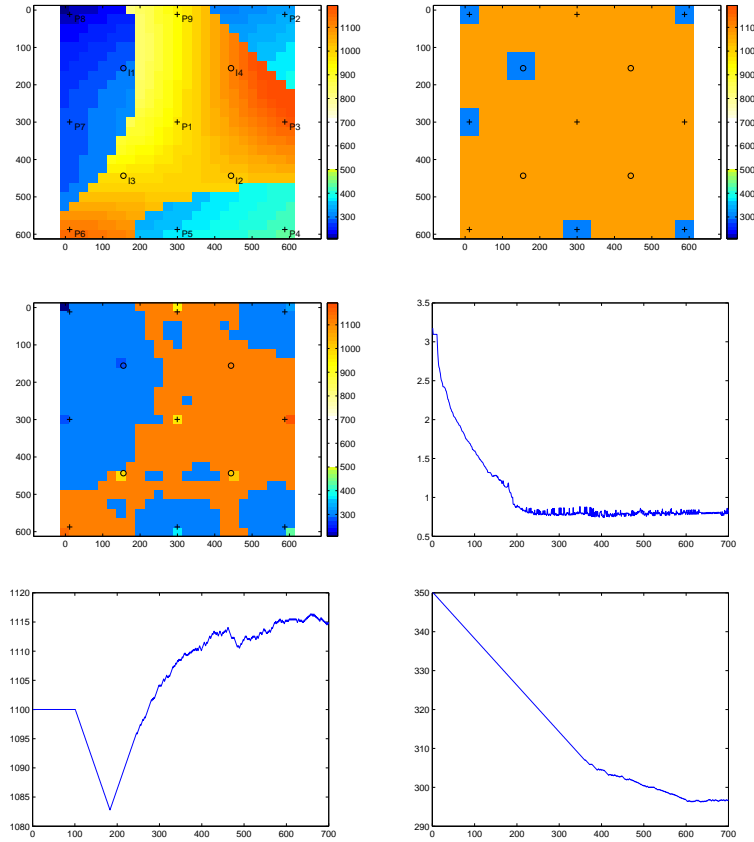


Figura 3.11: Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa I. Primera fila: Forma real (izquierda); inicialización etapa I (derecha). Segunda fila: Reconstrucción final etapa I (izquierda); evolución del funcional de coste etapa I (derecha). Tercera fila: Evolución del valor de permeabilidad promedio en la zona de lutita (izquierda); evolución del valor de permeabilidad promedio en la zona de arena (derecha).

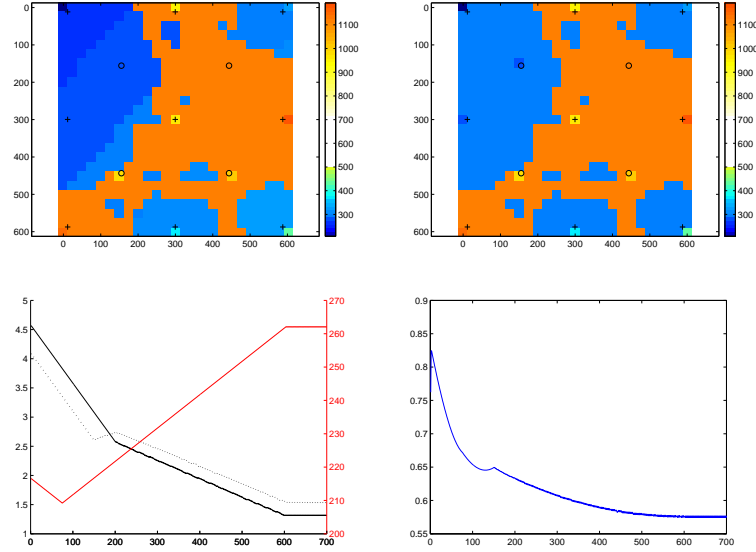


Figura 3.12: Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa II. Primera fila: Reconstrucción final etapa II (izquierda); inicialización etapa II (derecha). Segunda fila: Evolución de los parámetros α y β que caracterizan las zonas de lutita (izquierda); evolución del funcional de coste etapa II (derecha). Pozos de inyección son indicados por círculos (\circ), pozos de producción indicados con signo positivo (+).

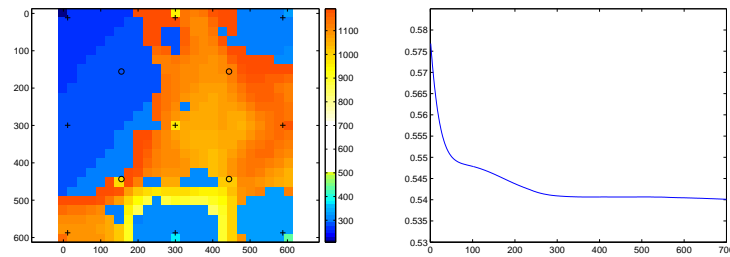


Figura 3.13: Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa III. Izquierda: Reconstrucción final, etapa III. Derecha: Evolución del funcional de coste etapa III.

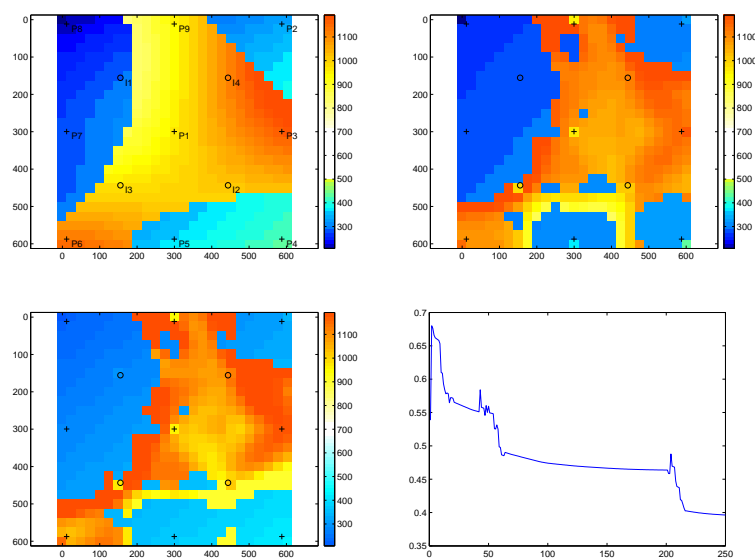


Figura 3.14: Caso híbrido. Primera estrategia, Etapa IV. Superior izquierda: Forma real. Superior derecha: inicialización, etapa IV. Inferior izquierda: Reconstrucción final, etapa IV. Inferior derecha: evolución del funcional de coste, etapa IV.

(derecha). En la segunda fila de esta figura se puede observar la evolución de los parámetros α y β de la zona de lutita que parametrizan la distribución de permeabilidad en esta región. Es importante mencionar que la función conjunto de nivel se mantiene sin variaciones durante la segunda y la tercera etapa.

En la tercera etapa se aplica la corrección en cada celda de la zona de arena usando el método del operador adjunto ([60]). La inicialización de esta etapa corresponde a la reconstrucción final de la segunda etapa (figura 3.12 izquierda). En la figura 3.13 se puede observar la reconstrucción de la permeabilidad obtenida luego de 700 iteraciones (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha) sin modificar los valores de la permeabilidad en la zona de lutita y manteniendo la función conjunto de nivel sin variaciones.

En la cuarta etapa se varían las formas y los valores de permeabilidad en ambas zonas. En la zona de lutita se ajustan los parámetros α y β , en la zona de arena se ajustan los valores de permeabilidad de cada celda y además se ajusta la geometría de las formas, todo de manera simultanea. En la primera fila de la figura 3.14 se pueden observar la reconstrucción de la permeabilidad obtenida en esta última etapa (izquierda) y la inicialización de esta etapa que corresponde a la final de la etapa III. En la segunda fila de esta figura se puede observar la reconstrucción final de la permeabilidad (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha).

3.3.2. Segunda estrategia

La segunda estrategia que se plantea para reconstruir la distribución de permeabilidad (presentada en la figura 3.11 superior izquierda) se basa en perturbar las variables simultáneamente como en la etapa IV de la primera estrategia pero ahora desde el principio. En la figura 3.15 se presentan los resultados obtenidos aplicando esta estrategia.

En la primera fila de la figura 3.15 se muestra el perfil de permeabilidad real o de referencia (izquierda), la inicialización basada en información de los pozos (derecha) que coincide con la inicialización de la etapa I de la primera estrategia. La distribución real e inicial son las mismas para ambas estrategias. A la izquierda de la segunda fila de esta figura se observa la reconstrucción final obtenida aplicando la estrategia de ajuste simultáneo de formas y valores en cada celda; los perfiles de permeabilidad obtenidos en cada zona corresponden a ajustes de valores en cada celda usando el método adjunto para la zona de arena y ajuste de parámetros correspondiente a una

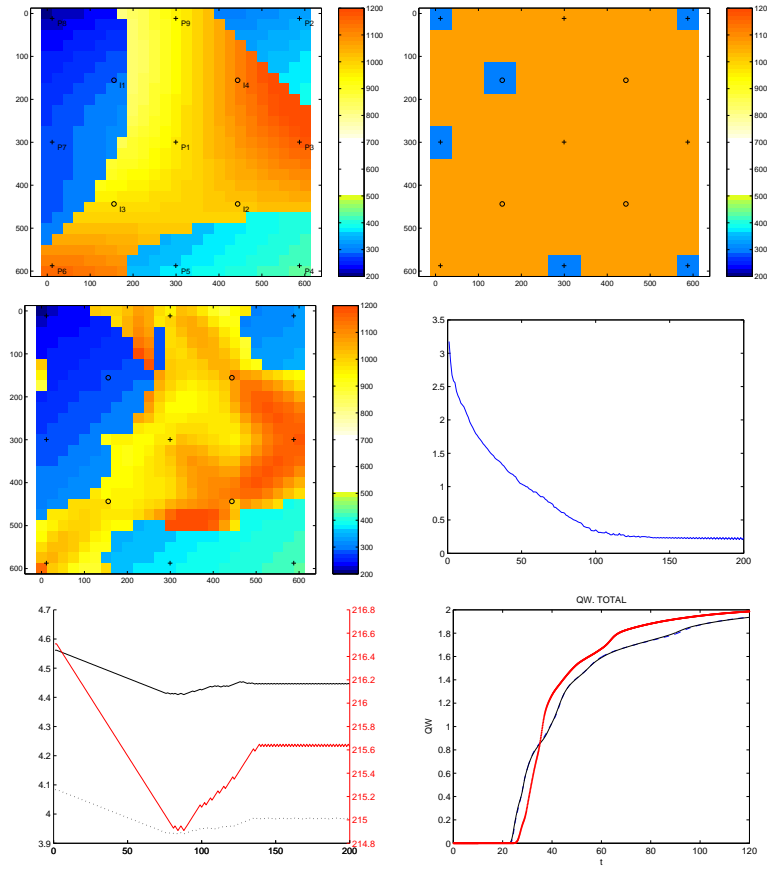


Figura 3.15: Caso híbrido. Segunda estrategia. Primera fila: Forma real (Izquierda); inicialización (Derecha). Segunda fila: Reconstrucción final (Izquierda); evolución del funcional de coste (Derecha). Tercera fila: Evolución de los parámetros α y β que caracterizan las zonas de lutita (Izquierda); Ajuste de la tasa de producción de agua, la línea roja continua es la inicial, la línea continua es la real y la discontinua es la reconstrucción (Derecha).

distribución lineal de permeabilidad para la zona de lutita. A la derecha de la segunda fila de esta figura se muestra la evolución del funcional de coste después de 200 iteraciones. Se puede observar que la tendencia se ha estabilizado. En la tercera fila se observa la evolución de los parámetros α y β que caracterizan las zonas de lutita (izquierda); a la derecha se muestra el ajuste de la tasa de producción de agua. La línea roja continua corresponde al mapa de permeabilidad inicial, la línea continua oscura corresponde al mapa de permeabilidad real y la línea discontinua corresponde a la reconstrucción final del perfil de permeabilidad. Como se puede observar la tendencia real de los datos de producción son muy cercanos a los generados por la reconstrucción.

A partir de los resultados obtenidos al aplicar ambas estrategias se puede observar que se generan reconstrucciones que ajustan adecuadamente los datos reales o de referencia. La primera estrategia, a la que le corresponde un residuo mínimo igual a 0.39, al ser un proceso secuencial es más estable y no necesita aplicar optimización en las variables o pasos que se usan a lo largo de cada etapa. La segunda estrategia, a la que le corresponde un residuo mínimo igual a 0.18, requiere afinar los pasos de cada una de las correcciones de tal forma de mantener la estabilidad durante el proceso de evolución.

3.4. Publicaciones y presentaciones

Publicaciones:

1. (2006) Shape reconstruction and structural inversion for medical, geophysical and industrial tomography, O. Dorn and R. Villegas, Proc. Oberwolfach workshop on 'Mathematical Methods in Tomography' (org. A. Louis, F. Natterer and E. T. Quinto), Report No. 34/2006, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, pp 50-52.
2. (2006) Simultaneous characterization of geological regions and parameterized internal permeability profiles in history matching, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Proc. 10th European conference on the mathematics of oil recovery ECMOR X, 4-7 Sept., Amsterdam, Netherlands, Proc. paper A015, (pp 1-9).
3. (2006) Simultaneous characterization of geological shapes and permeability distributions in reservoirs using the level set method, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan, F. Mustieles, Society of Petroleum

Engineers SPE paper 100291, SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition, Vienna, Austria, June 12-15, 2006 (Proc. paper C015, pp 1-12).

Presentaciones:

1. (2006), May 24 Simultaneous reconstruction and segmentation of images from two-phase fluid flow data using a level set technique (by R. Villegas and O. Dorn) Poster presentation at the workshop 'Visual Learning and Recognition at the Institute for Mathematics and its Applications (IMA), Minneapolis, USA, May 22-26, 2006.
2. (2006), May 15 A new level set technique for the simultaneous imaging of shapes and material properties from two-phase flow data (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas), session 'Computational and Modeling Approaches to Inverse Problems, SIAM conference on Imaging Science, Minneapolis, May 15-17, 2006.
3. (2006), June 12-15 Simultaneous characterization of geological shapes and permeability distributions in reservoirs using the level set method, (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan and F. J. Mustieles, presented by R. Villegas), SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition, Vienna, Austria.
4. (2006), July 30 - August 7, Shape reconstruction and structural inversion for medical, geophysical and industrial tomography (by O. Dorn and R. Villegas, presented by O. Dorn) 'Mathematical methods in tomography' workshop at Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Germany.
5. (2006), Sept 5 Simultaneous characterization of geological regions and parameterized internal permeability profiles in history matching, (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by O. Dorn) 10th European conference on the mathematics of oil recovery ECMOR X, 4-7 Sept., Amsterdam, Netherlands.
6. (2006), Dec 13-15 Level Set techniques for geological shape reconstruction in reservoir characterization (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) Inverse Days 2006', Tampere, Finland.

7. (2007), June 25-29 A generalized level set technique for the simultaneous reconstruction of geological regions and region-specific model-based internal permeability profiles of petroleum reservoirs from production data. Conference on Applied Inverse Problems (AIP 2007): Theoretical and Computational Aspects, Vancouver, Canada.
8. (2007), July 16-20 Shape-based techniques for an inverse two-phase flow problem in reservoir characterization (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 07), Zurich, Switzerland

Capítulo 4

Perturbaciones topológicas

4.1. Manejo de zonas de baja sensibilidad

Este capítulo presenta un algoritmo para la caracterización de yacimientos con más de una litofacie que contienen regiones de baja sensibilidad. Con el objetivo de caracterizar las regiones de baja sensibilidad se aplican perturbaciones topológicas durante la reconstrucción. En este trabajo se presenta un método para tratar de identificar cuerpos geológicos que los métodos presentados en trabajos previos y en los capítulos anteriores de esta tesis no eran capaz de reconstruir [144, 145].

En este capítulo se presenta un novedoso algoritmo matemático para la caracterización de yacimientos con más de una litofacie que contienen regiones de baja sensibilidad. El algoritmo usa una representación de formas usando el método de conjunto de nivel describiendo diferentes litofacies en el yacimiento. Esas formas necesitan ser reconstruidas usando los datos de producción y un modelo de flujo bifásico. Con el objetivo de caracterizar las regiones de baja sensibilidad, se aplican perturbaciones topológicas sucesivamente durante la reconstrucción en esas regiones de baja sensibilidad. La técnica de conjunto de nivel evoluciona las formas creadas siguiendo una dirección de gradiente que minimiza la diferencia entre los datos calculados y los reales. Las nuevas formas creadas en las posiciones incorrectas tienden a desaparecer gradualmente. Por el contrario se observa que los objetos creados en los lugares donde una litofacie esta presente en el modelo real tienden a crecer hasta que ajustan aproximadamente las fronteras reales. En esta parte del trabajo se discuten diferentes estrategias y se presentan resul-

tados numéricos que demuestran y comparan su comportamiento para dos situaciones realísticas en 2D.

Un yacimiento de hidrocarburo que produce mediante un sistema de inyección de agua, típicamente tiene pozos con datos reportados con una cierta frecuencia. Estos datos de producción muestran una sensibilidad fuertemente heterogénea en diferentes zonas del yacimiento. Las regiones que están directamente conectadas por un pozo de inyección y uno de producción en el proceso de inyección de agua tiene una gran influencia sobre los datos de producción. Por el contrario aquellas regiones donde el flujo de agua y petróleo es pequeño no tendrán mucha influencia. Estas zonas se distinguen como “zonas de alta sensibilidad” y “zonas de baja sensibilidad” respectivamente. Es claro que durante el proceso de ajuste histórico las zonas de alta sensibilidad tendrán un efecto dominante sobre la reducción del funcional de coste, tal que frecuentemente las zonas de baja sensibilidad tienen una caracterización más pobre o deficiente a pesar de la disminución del funcional de coste. Lo que es peor, frecuentemente herramientas normalmente usadas no generan una reconstrucción estable de la zonas de baja sensibilidad como es demostrado en esta parte del trabajo.

Por otra parte, el ingeniero de yacimientos necesita conocer las características en todas las áreas del yacimiento con el objetivo de planificar la ubicación de nuevos pozos de inyección ó de producción, para estimar el volumen total presente en el yacimiento y para predecir la producción del campo.

En este capítulo se plantea un esquema para caracterizar zonas de baja sensibilidad en yacimientos de petróleo usando una técnica matemática novedosa. Además se presenta una adaptación de nuestro algoritmo de reconstrucción de formas, el cual es capaz de caracterizar de forma confiable las zonas de alta sensibilidad y las de baja sensibilidad aplicando algunas extensiones que se presentan a lo largo de este capítulo.

Aquí se presenta una forma práctica y eficiente de calcular el perfil de sensibilidad (ó derivadas de Fréchet) [8, 26, 33] para nuestro modelo usando el esquema adjunto. Además se describe el proceso de perturbaciones topológicas para crear nuevos objetos en zonas de baja sensibilidad [64, 69, 105, 130]. Se resume el nuevo algoritmo y se presentan dos ejemplos numéricos en dos dimensiones mostrándose el comportamiento del algoritmo en situaciones realistas.

En esta parte se usa, de nuevo, la ley de evolución general para la función de conjunto de nivel:

$$\frac{d\psi}{dt} = f(\mathbf{x}, t, \psi, \mathcal{R}). \quad (4.1)$$

La función conjunto de nivel ψ describe la forma D durante la evolución artificial. Para recordar, el objetivo es encontrar el término $f(\mathbf{x}, t, \psi, \mathcal{R})$ tal que la evolución converge a la solución deseada del problema inverso.

El diferencial del funcional de coste $\mathcal{J}(K(\psi(t)))$ con respecto al tiempo artificial t aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{dK}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \frac{dK}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \right\rangle_p. \quad (4.2)$$

Así se define la dirección de búsqueda como

$$f_d(\mathbf{x}) = -(K_e - K_i) \chi_{\psi,d}(\mathbf{x}) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.3)$$

donde $\chi_{\psi,d}(\mathbf{x})$ es una aproximación positiva de la función delta $\delta(\psi)$ y el sub-índice d indica el grado de aproximación. En los experimentos numéricos de este capítulo se usa de forma variable la función de banda “*narrowband*”:

$$\chi_{\psi,d}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ si existe } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ con } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < d \text{ y } \psi(\mathbf{x}_0) = 0 \\ 0 & , \text{ en otros casos.} \end{cases}$$

La función de banda definida anteriormente tendrá gran importancia en la nueva técnica de reconstrucción presentada en este capítulo, debido a que concentra la corrección cerca a la fronteras de la forma.

Para simplicidad de la derivación, el espacio $L_2(\Omega)$ (relacionado al producto interno estandar) ha sido asumido como el espacio de la función de conjunto de nivel ψ . Sin embargo, puede ser seleccionado un sub-espacio $H_1(\Omega)$ tal que $H_1(\Omega) = \{\psi : \psi \in L_2(\Omega), \nabla\psi \in L_2(\Omega), \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 \text{ at } \partial\Omega\}$. En los experimentos numéricos presentados en este capítulo se usa este espacio $H_1(\Omega)$, el cual sugiere la aplicación de un operador de suavidad sobre $f_d(\mathbf{x})$. Para más detalle ver [60, 143] y el Apéndice 4. Así después de aplicar el mencionado filtro de suavidad $f_d(\mathbf{x})$, el término seleccionado (4.1) estará concentrado en una pequeña región de la función de banda alrededor de las fronteras de las litofacies y será lo suficientemente suave. Como se mencionó anteriormente sus valores permitirán encontrar una dirección de descenso del funcional de coste \mathcal{J} .

Discretizando numéricamente, usando el método de diferencias finitas, como anteriormente (2.18) con un paso de tiempo $\tau > 0$, se genera para un tiempo t la regla de corrección:

$$\frac{\psi(t + \tau) - \psi(t)}{\tau} = (K_i - K_e) \chi_{\psi,d} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K). \quad (4.4)$$

Interpretando $\psi^{(n+1)} = \psi(t + \tau)$ y $\psi^{(n)} = \psi(t)$, se llega a la iteración:

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} + \tau \delta \psi^{(n)}, \quad \psi^{(0)} = \psi_0, \quad (4.5)$$

con

$$\delta \psi^{(n)} = (K_i - K_e) \chi_{\psi^{(n)},d} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.6)$$

Obsérvese que la selección

$$f_t(\mathbf{x}) = -(K_e - K_i) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.7)$$

definirá una dirección de descenso para (2.11), lo que implica simplemente depreciar la función de banda $\chi_{\psi,d}$ en $f_a(\mathbf{x})$. El sub-índice t en este término de evolución es escogido para indicar que esta función permite topológicamente crear objetos lejos de las fronteras actuales reduciendo una parte de la función de conjunto de nivel inicialmente positiva hasta que sus valores se vuelven ceros ó negativos en esta zona [46]. Allí se explica que la selección del término que actualiza la función de conjunto de nivel tiene un efecto similar a la aplicación de “derivada topológica” [18, 128, 129, 61, 63, 52, 53, 24, 27] para el problema inverso. Esto permite crear pequeños objetos en el dominio en localizaciones donde las perturbaciones topológicas genera una disminución del funcional de coste \mathcal{J} . En el apéndice 3.3 se presenta la idea descrita para entender cambios topológicos

En los experimentos numéricos mostrados en esta parte del trabajo, se investiga el comportamiento de dos alternativas ($f_a(\mathbf{x})$ y $f_t(\mathbf{x})$) en situaciones donde se busca reconstruir objetos ocultos que se encuentran en zonas de alta sensibilidad y objetos ocultos en zonas de baja sensibilidad del yacimiento.

4.1.1. Perfil de sensibilidad usando la técnica adjunta

Las funciones de sensibilidad están muy relacionadas a las derivadas de Fréchet ó al operador adjunto linealizado $\mathcal{R}'(K)^*$ (ver los detalles en [40, 42]).

De hecho, la sensibilidad corresponde al efecto de $\mathcal{R}'(K)^*$ aplicado en un tiempo dado en cada pozo de producción cuando la solución del problema directo ha sido calculada para cada término fuente (a tiempo cero) y el correspondiente pozo de inyección. Una interpretación físicamente más intuitiva de estas funciones de sensibilidad que relacionan pozos inyectoros y pozos productores es de la siguiente manera: En cada punto del dominio el valor de la función de sensibilidad describe el efecto de una perturbación en el perfil de permeabilidad en la producción de cada pozo productor cuando el agua de inyección viene solo de un pozo de inyector.

La superposición de las funciones de sensibilidad para todos los pozos productores e inyectoros es llamado “perfil de sensibilidad” del yacimiento (ver figura 4.2).

Estas localizaciones donde el perfil de sensibilidad tienen valores mayores tendrán gran influencia sobre algunos datos de producción cuando se produce una perturbación en la función de permeabilidad en esas localizaciones. Por el contrario los lugares del yacimiento donde el perfil de sensibilidad tiene valores pequeños tienen menos influencia sobre los datos de producción cuando se aplica una perturbación en la función de permeabilidad en esos lugares. A partir de esta interpretación está claro que el problema de encontrar el perfil de permeabilidad en los lugares con valores pequeños de sensibilidad es extremadamente mal condicionado e inestable, Por lo tanto se debe tener especial cuidado cuando se trata de reconstruir imágenes del yacimiento a partir de los datos de producción. Este problema también se evidencia cuando la imagen del operador $\mathcal{R}'(K)^*$ sobre un cierto valor de $R(K)$ en los pozos de producción tendrá un valor relativamente pequeño en lugares de de baja sensibilidad y valores mucho mayores en zonas de alta sensibilidad.

En lo siguiente se describe como el perfil de sensibilidad para un yacimiento puede ser calculado eficientemente a partir de un esquema adjunto. La técnica descrita abajo calcula la función sensibilidad para un pozo de inyección y uno de producción corriendo solo una simulación del problema directo y una del problema adjunto. El perfil de sensibilidades final es entonces obtenido sumando las funciones de sensibilidad individuales (normalizadas) para todos los pozos de inyección y de producción en el yacimiento. Aquí solo se muestran los resultados básicos de esta técnica para generar los mapas de sensibilidad del yacimiento.

4.2. Perturbaciones topológicas

Se desea crear un nuevo objeto centrado en una pequeña región $\Omega_3 \subset \Omega$. Usando una representación de la función conjunto de nivel para las formas, se reduce la función conjunto de nivel (representada por Ψ en este capítulo) en esta pequeña región hasta que se convierta en negativa. Efectivamente, se podría simplemente colocar un valor negativo $\mu < 0$ de la función conjunto de nivel en esta pequeña región dentro de Ω_3 lo que tendría un efecto de crear un nuevo objeto. Sin embargo esta última estrategia generaría alta discontinuidad en la función conjunto de nivel en las fronteras de los nuevos objetos, lo que tendría un efecto perjudicial sobre la evolución de la función conjunto de nivel (es importante recordar que la función conjunto de nivel se ha seleccionado dentro del espacio de Sobolev en $H_1(\Omega)$). Por consiguiente, en el desarrollo de este trabajo se ha diseñado un algoritmo específico para introducir un nuevo objeto centrado en la región Ω_3 . Este algoritmo será descrito a continuación.

Se definen tres regiones diferentes Ω_3 , Ω_2 , y Ω_1 tal que Ω_3 es la pequeña región donde se introduce el nuevo objeto, Ω_2 son los alrededores de esta región (pequeña vecindad que excluye Ω_3), y Ω_1 es el resto del dominio Ω . Por consiguiente se tiene $\Omega = \Omega_3 \cup \Omega_2 \cup \Omega_1$ con $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Ver la figura 4.1. Así se introducen las tres funciones características.

$$\chi_{12}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dentro } \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ 0 & \text{en el exterior } \Omega_1 \cup \Omega_2 \end{cases}, \quad \chi_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{dentro } \Omega_3 \\ 0 & \text{en el exterior } \Omega_3 \end{cases},$$

$$\chi_{23}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dentro } \Omega_2 \cup \Omega_3 \\ 0 & \text{en el exterior } \Omega_2 \cup \Omega_3 \end{cases}.$$

Una vez definidas estas funciones características, se plantea el objetivo de minimizar el funcional de coste:

$$\min_{\Phi} \Xi(\Phi) = \frac{a}{2} \|\chi_{23} \nabla \Phi\|^2 + \frac{b}{2} \|\chi_{12}(\Phi - \Psi)\|^2 + \frac{c}{2} \|\chi_3(\Phi - \mu)\|^2, \quad (4.8)$$

donde las constantes positivas a , b y c son parámetros con pesos que pueden ser escogidos con cierta libertad. El minimizador Φ reemplaza Ψ de la función conjunto de nivel. Obsérvese que el tercer término de (4.8) penaliza la distancia de Φ a partir del valor negativo μ dentro de la zona Ω_3 donde se

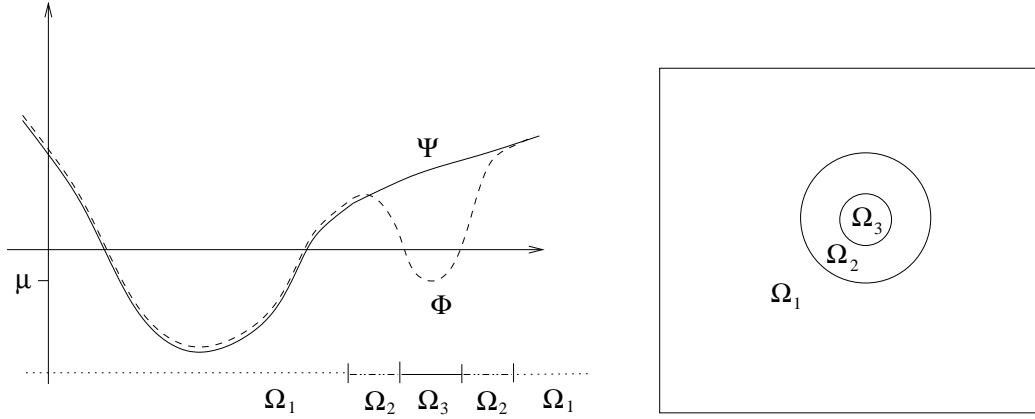


Figura 4.1: Introduciendo un nuevo objeto. Izquierda: Esquemas de las secciones transversales de una función conjunto de nivel Ψ y la modificada Φ luego del proceso de minimización (4.12). Derecha: Vista esquemática de las regiones Ω_1 , Ω_2 , y Ω_3 .

quiere introducir el nuevo objeto. El segundo término penaliza la distancia de la nueva función Φ con respecto a la función anterior Ψ en las afueras de Ω_3 , y el primer término tiene el efecto de suavizar la nueva función conjunto de nivel Φ dentro de Ω_3 y sus alrededores contenidos en Ω_2 . La función conjunto de nivel resultante Φ , será una función suave y variable (como lo era Ψ) en todo el dominio Ω , para coincidir aproximadamente con la mayor parte de Ω (en Ω_1) y disminuirá en una forma suave hasta el valor objetivo $\mu < 0$ dentro de Ω_2 tal que dentro de Ω_3 un nuevo objeto es creado con valor $\mu < 0$ para la función conjunto de nivel. Ver de nuevo la figura 4.1 para una ilustración de este cambio en la función conjunto de nivel. Obsérvese que no es necesario que las fronteras de los objetos creados coincidan exactamente con las fronteras de la región Ω_3 . El Principal logro es obtener una función conjunto de nivel que añade un nuevo objeto en la localización correcta siempre que los parámetros del problema de minimización sean escogido cuidadosamente. En los experimentos numéricos presentados aquí, se usan los valores $a = 0,44$, $b = 1$, $c = 0,6$, $\mu = -200$ y $\gamma = 0,4$ (ver las ecuaciones (4.12)), pero esos valores podrían cambiar según el caso.

Con el objetivo de resolver el problema de minimización descrito se emplea el método del gradiente. La dirección del gradiente puede ser determinada perturbando el argumento Φ del funcional de coste $\Xi(\Phi)$ una pequeña

cantidad h . Así se obtiene:

$$\begin{aligned} \Xi(\Phi + h) &= \frac{a}{2} \langle \chi_{23} \nabla(\Phi + h), \chi_{23} \nabla(\Phi + h) \rangle \\ &+ \frac{b}{2} \langle \chi_{12}(\Phi + h - \Psi), \chi_{12}(\Phi + h - \Psi) \rangle + \frac{c}{2} \langle \chi_3(\Phi + h - \mu), \chi_3(\Phi + h - \mu) \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

simplicando esta expresión usando integración por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} \Xi(\Phi + h) &= J(\Phi) + \langle a\chi_{23}\Delta\Phi - b\chi_{12}(\Phi - \Psi) - c\chi_3(\Phi - \mu), h \rangle + O(\|h\|^2) \\ &= J(\Phi) + \langle \text{grad}_J(\Phi), h \rangle + O(\|h\|^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

con

$$\text{grad}_J(\Phi) = a\chi_{23}\Delta\Phi - b\chi_{12}(\Phi - \Psi) - c\chi_3(\Phi - \mu). \quad (4.11)$$

Prácticamente, el esquema del gradiente puede ser implementada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= \Psi \\ \Phi^{(n+1)} &= \Phi^{(n)} + \gamma [a\chi_{23}\Delta\Phi^{(n)} - b\chi_{12}(\Phi^{(n)} - \Psi) - c\chi_3(\Phi^{(n)} - \mu)] , \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde se asume que $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ en la frontera del dominio $\partial\Omega$.

4.2.1. Algoritmo

A continuación se sumaria el nuevo algoritmo para el manejo de zonas de baja sensibilidad:

- 1.) Calcular la función conjunto de nivel inicial $\psi^{(0)}$ como una función de distancia de las formas iniciales basadas en información previa del yacimiento. $n = 0$.
- 2.) Usar el simulador directo (IMPES en este caso) para resolver el sistema (1.22)–(1.26) sobre la última inicialización $K(\psi^{(n)})$ de las formas geológicas. La forma correspondiente es $D^{(n)}$ con frontera $\Gamma^{(n)}$. Esto genera el vector de las medidas $g^{(n)}$. Calcular el residuo $\mathcal{R}(\psi^{(n)}) = g^{(n)} - \tilde{g}$.
- 3.) Resolver el problema adjunto (8.33), con $\rho = \mathcal{R}(\psi^{(n)})$. Entonces $\delta K = \mathcal{R}'(K)^* \rho$ viene dado por la ecuación (8.32).

4a.) **Opción 1:** Cuando se usa la función de banda (“narrowband”): construir la función de bandas $\chi_{\psi^{(n)},d}$ la cual es una matriz con unos en las celdas cercanas a $\Gamma^{(n)}$ y ceros en el resto del dominio. Calcular

$$\delta\psi^{(n)} = (K_i - K_e) \chi_{\psi^{(n)},d} \delta K \quad (4.13)$$

de acuerdo a (2.18).

4b.) **Opción 2:** Cuando no se usa la función de banda: Calcular

$$\delta\psi^{(n)} = (K_i - K_e) \delta K \quad (4.14)$$

de acuerdo a (4.3).

5.) Calcular

$$\widehat{\delta\psi}^{(n)} = (\alpha I - \beta \Delta)^{-1} \delta\psi^{(n)} \quad (4.15)$$

con parámetros de regularización predeterminados $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ (en los casos mostrados en este capítulo $\alpha = 1$ y β con valores entre 0,08 y 0,1, y adecuadas condiciones de fronteras. Esto genera la actualización regularizada de la función conjunto de nivel $\widehat{\delta\psi}^{(n)}$.

6.) Aplicando la corrección, se obtiene:

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} + \tau^{(n)} \widehat{\delta\psi}^{(n)} \quad (4.16)$$

donde el tamaño del paso $\tau^{(n)}$ es determinado por algún criterio de selección del paso. En los experimentos numéricos presentados en este capítulo, se especifica el máximo número de celdas que cambian de signo de la función conjunto de nivel al valor de 8. Se vuelve a escalar la función conjunto de nivel de tal forma que el mínimo es un valor fijo.

7.) Se verifica el criterio de parada. Si se cumple, fin del algoritmo.

8.) **Opción 3:** Para aplicar las perturbaciones topológicas: Se verifica el criterio para añadir un nuevo objeto (por ejemplo cada 40 iteraciones). En caso afirmativo, se añade un nuevo objeto en el dominio como se explica en la sección 4.2 usando un criterio previamente establecido del tamaño del paso y de la localización del nuevo objeto.

9.) Regresar al paso 2.) con $n = n + 1$ y continuar desde allí, usando la nueva forma y la función conjunto de nivel correspondiente para encontrar la nueva corrección. Continuar este procedimiento en forma iterativa.

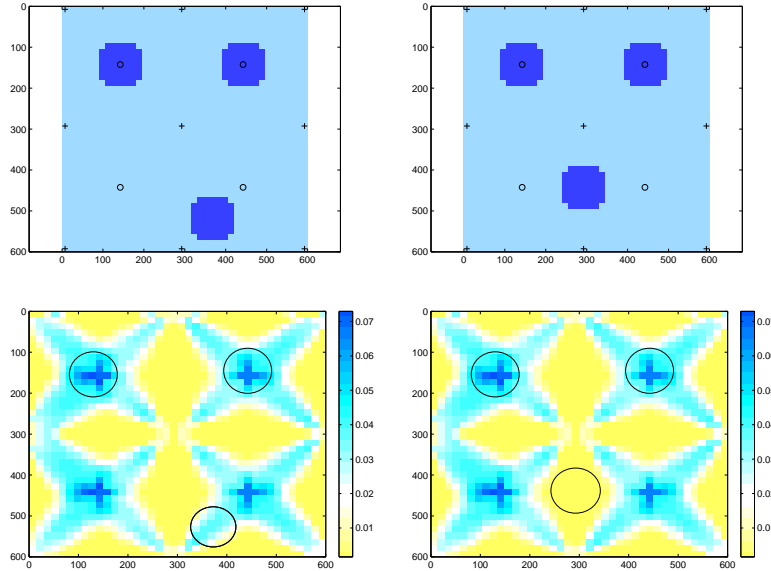


Figura 4.2: Fila superior: Permeabilidad Real (Izquierda: caso 1, Derecha: caso 2). Fila inferior: Perfil de sensibilidad del yacimiento, donde las localizaciones de los cuerpos de lutita son indicados por círculos.

Obsérvese que cualquiera de las dos opciones **Opción 1** y **Opción 2** indicadas en el algoritmo superior pueden ser combinadas, también se puede escoger la **Opción 3** ó no para añadir un nuevo objeto, caso que se trata en el capítulo anterior. Esto generaría diferentes versiones del algoritmo. Algunas de las diferentes versiones son probadas y comparadas entre sí en la siguiente sección de este capítulo usando dos casos, uno de ellos tiene objetos ocultos localizados en regiones de alta sensibilidad, y el otro caso tiene el objeto oculto en una zona de baja sensibilidad.

4.2.2. Ejemplos numéricos

Con el objetivo de verificar el comportamiento del algoritmo de inversión de formas diseñado para el manejo de casos con zonas de alta y baja sensibilidad, se han estudiado dos ejemplos realísticos en dos dimensiones. Los datos generales del yacimiento son los que se presentan en la sección 1.7. De nuevo la permeabilidad de la zona de lutita es 250 milli-Darcy (mD) (indi-

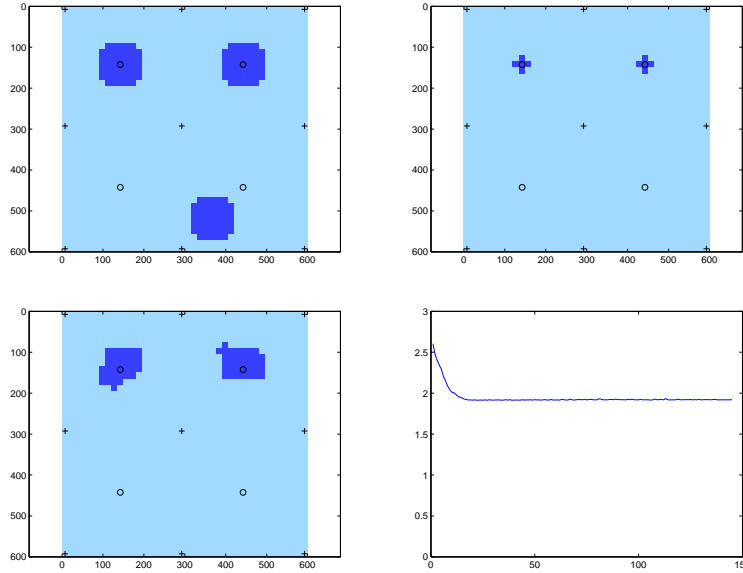


Figura 4.3: Caso 1 usando la función de banda (narrowband). Superior Izq.: Permeabilidad real. Superior Der.: Inicialización. Inferior Izq.: Reconstrucción Final (iteración 140). Inferior Der.: Evolución del funcional de coste.

cada como azul oscuro en el mapa de permeabilidad), y la zona de arena tiene una permeabilidad de 1500 mD (indicada como azul claro en el mapa de permeabilidad). Con estos valores de permeabilidad se verifica que existe gran contraste entre la zona de lutita y arena. Todos los parámetros físicos de yacimiento se asumen constantes y conocidos, así la incógnita es la topología de las regiones. Por lo tanto las formas geológicas serán reconstruidas usando los datos de producción.

Los dos modelos reales o de referencia para la permeabilidad son mostrados en la fila superior de la figura 4.2. La fila inferior de esta figura muestra el perfil de sensibilidad del yacimiento asumiendo una distribución de permeabilidad homogénea. En ambos yacimientos existen tres zonas de lutita con formas desconocidas. El objetivo del problema inverso a resolver es encontrar y caracterizar estos tres cuerpos de lutita. Para tener una referencia de entrada, las localizaciones de las tres zonas de lutita están indicadas por círculos en las imágenes correspondientes a los perfiles de sensibilidades. Se puede observar que las dos zonas de lutitas ubicadas en la parte superior del

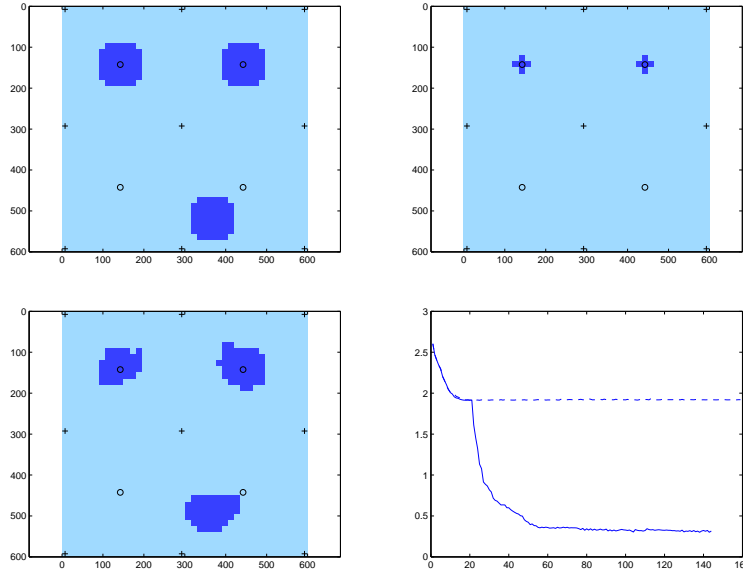


Figura 4.4: Caso 1 *Sin* usar la función de bandas (narrowband). Superior izq.: Permeabilidad Real. Superior Der.: inicialización. Inferior izq.: reconstrucción final (iteración 140). Inferior Der.: Evolución del funcional de coste (línea solida: sin narrowband, línea discontinua: con narrowband como se muestra en la Fig. 4.3).

yacimiento se encuentran en zonas de alta sensibilidad. Sin embargo, para el caso 1 (imagen izquierda) el tercer objeto se encuentra en zona de alta sensibilidad, mientras que para el caso 2 (imagen derecha) el tercer objeto se encuentra en zona de baja sensibilidad. El objetivo de los experimentos numéricos mostrados es investigar y comparar el comportamiento de los diferentes casos de nuestro algoritmo (como se explica en 4.2.1) para estos dos ejemplos.

En la figura 4.3 se muestran los resultados de la reconstrucción para el caso 1 (tercer objeto en la zona de alta sensibilidad) *usando la función de banda (narrowband) y sin perturbaciones topológicas*. la imagen superior izquierda muestra la permeabilidad real o de referencia, y la permeabilidad superior derecha es la inicialización utilizada. Es importante destacar que la inicialización es igual para todos los casos mostrados en esta sección y proviene de las medidas de permeabilidad local realizadas en las ubicaciones

de los pozos. La imagen inferior izquierda muestra la reconstrucción final, y la imagen inferior derecha muestra la evolución del funcional de coste durante el proceso de reconstrucción. Se puede observar que el algoritmo no fue capaz de recuperar el tercer objeto a pesar de estar localizado en una zona de alta sensibilidad. Esta reconstrucción corresponde a un mínimo local del funcional de coste. Usando la función de banda (narrowband) el algoritmo no es capaz de salir del mínimo local y recuperar el tercer objeto debido a la naturaleza local de las correcciones, ya que estas se concentran cerca de la fronteras, por usar la función de bandas.

En la figura 4.4 se muestran los resultados de la reconstrucción para el caso 1 (tercer objeto en una zona de alta sensibilidad) *sin usar la función de banda (narrowband) y sin usar perturbaciones topológicas*. La imagen superior izquierda muestra el perfil real o de referencia, y la imagen superior derecha corresponde a la inicialización para la reconstrucción. La imagen inferior izquierda muestra la reconstrucción final, y la imagen inferior derecha presenta la evolución del funcional del coste durante el proceso de reconstrucción. Aquí, la gráfica superior discontinua muestra la evolución del funcional de coste del ejemplo anterior (con narrowband) para comparar los resultados. La curva solida inferior muestra la evolución de coste para esta nueva situación (sin narrowband). Como consecuencia de eliminar la función de banda, el algoritmo ha sido capaz de crear automáticamente nuevos objetos lejos de las formas correspondientes a la inicialización. Usando esta técnica de corrección global del dominio se evitan los mínimos locales. De esta forma los tres objetos correspondientes a lutita han sido bien detectados y reconstruidos.

La figura 4.5 muestra la evolución de la forma reconstruida en este ejemplo. La creación automática de un nuevo objeto puede ser claramente visto en la imagen inferior izquierda.

En la figura 4.6 se muestran los resultados de la reconstrucción para el caso 2 (tercer objeto en zona de baja sensibilidad) *usando la función de banda y sin usar perturbaciones topológicas*. La imagen superior izquierda muestra el perfil real o de referencia, la imagen superior derecha muestra la inicialización para la reconstrucción. La imagen inferior izquierda muestra la reconstrucción final y la imagen inferior derecha muestra la evolución del funcional de coste durante el proceso de reconstrucción. Según lo esperado y basado en los primeros resultados del caso 1, el algoritmo no fue capaz de recuperar el tercer objeto localizado en la zona de baja sensibilidad. En este caso la reconstrucción también corresponde a un mínimo local del funcional

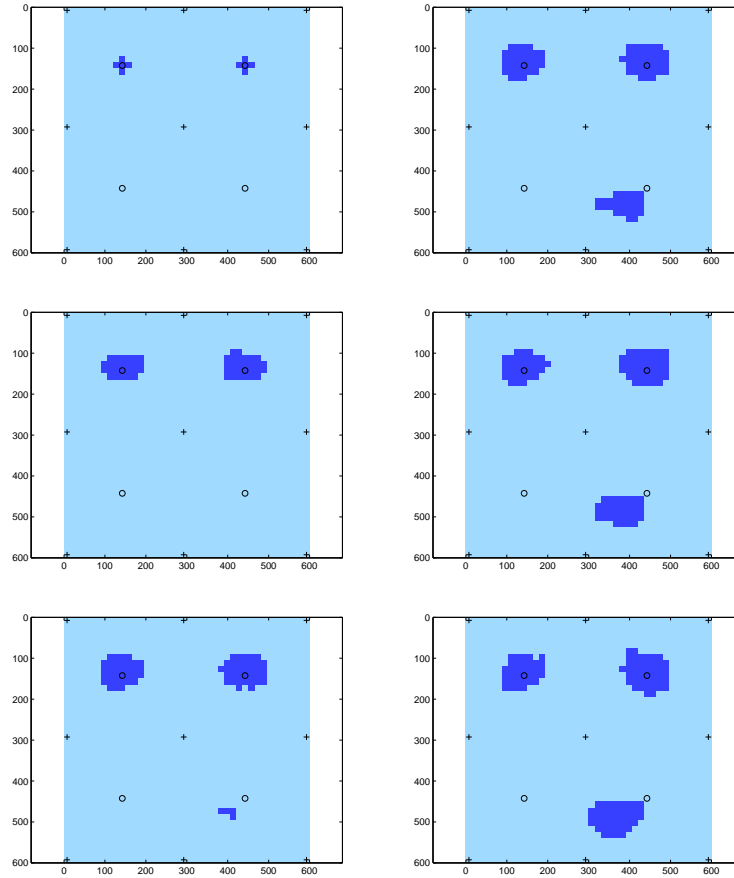


Figura 4.5: Evolución de las formas para el caso 1 sin usar la función de banda(narrowband). Columna izq. desde arriba hacia abajo: inicialización, después de 10 y 20 iteraciones. Columna derecha desde arriba hacia abajo: después de 30, 40 y 80 iteraciones.

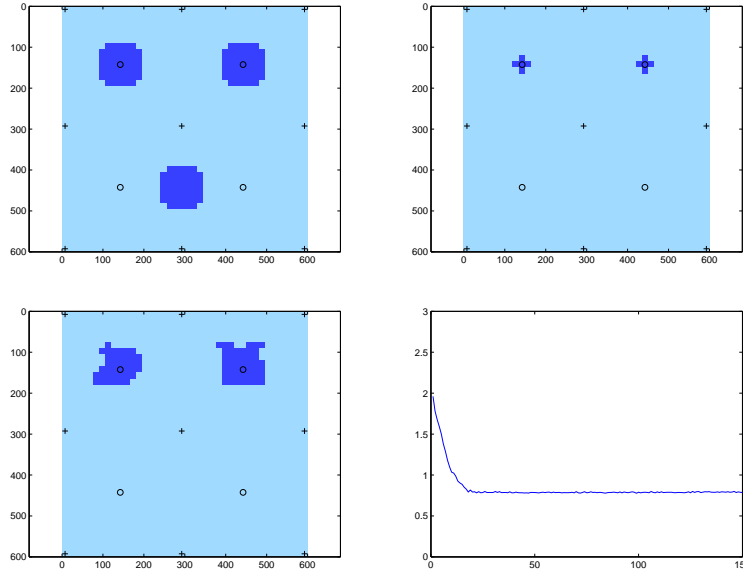


Figura 4.6: Caso 2 usando la función de banda. Superior izquierda: Permeabilidad real. Superior derecha: Inicialización. Inferior izq.: Reconstrucción final(iteración 140). Inferior derecha: Evolución del funcional de coste.

de coste. Usando la función de banda el algoritmo no es capaz de salir del mínimo local automáticamente para obtener el tercer objeto correspondiente a lutita en el yacimiento. Como en uno de los casos anteriores el uso de la función de banda restringe la corrección a las celdas cercanas a las fronteras.

En la figura 4.7 se muestran los resultados de la reconstrucción para el caso 2 *sin usar una función de banda y sin usar perturbaciones topológicas*. La imagen superior izquierda muestra el perfil real o de referencia, la imagen superior derecha muestra la inicialización para la reconstrucción. La imagen inferior izquierda muestra la reconstrucción final y la imagen inferior derecha muestra la evolución del coste funcional durante el proceso de reconstrucción. De nuevo, la curva discontinua muestra la evolución del funcional de coste del ejemplo anterior (con narrowband) para comparar, la curva inferior sólida muestra la evolución del funcional de coste para esta nueva situación (sin narrowband). La eliminación de la función de banda permite que el algoritmo sea capaz de crear nuevos objetos automáticamente lejos de las fronteras. De esta forma los mínimos locales pueden ser evitados. Sin embargo, en contraste

con la situación anterior donde fue reconstruido de manera automática el objeto localizado en la zona de alta sensibilidad, en este caso el tercer objeto no es recuperado en su totalidad. Solo se puede recuperar una fracción del objeto, además se han creado pequeños objetos en posiciones equivocadas del yacimiento, lo que deteriora la reconstrucción final. Una posible interpretación para estos resultados es que se obtiene un nuevo mínimo local con respecto al gradiente global calculado para todas las zonas del yacimiento. Cuando se aplica la técnica de gradiente de forma estricta el algoritmo pararía en este punto o se volvería muy lento. En las reconstrucciones presentadas en este capítulo no se aplica la técnica de gradiente de forma estricta, ya que se acepta pequeños aumentos del coste, que están asociados a la creación de los pequeños objetos en zonas erróneas debido a que el criterio de paso utilizado para las correcciones es cambiar hasta 8 celdas en cada paso. Sin embargo estos pequeños objetos pudiesen ser eliminados, por ejemplo con técnicas de procesamiento de imagen. Como se comentó anteriormente, La creación repetida y remoción de los pequeños objetos en zonas erróneas producen oscilaciones en el funcional de coste como puede ser observada en la figura 4.7. Por otra parte, localizar la dirección de gradiente aplicando la función de banda y añadiendo pequeños objetos (semillas) como perturbaciones topológicas en zonas de baja sensibilidad puede ayudar a evitar los mínimos locales, como es mostrado en la figura 4.8.

En la figura 4.8 se muestran los resultados de la reconstrucción para el caso 2 usando la función de banda y aplicando la estrategia de perturbaciones topológicas. La imagen superior izquierda muestra el perfil real o de referencia, la imagen superior derecha muestra la inicialización para la reconstrucción. La imagen inferior izquierda muestra la reconstrucción final y la imagen inferior derecha muestra la evolución del funcional de coste durante el proceso de reconstrucción. En la estrategia de perturbación topológica aplicada en esta parte, las semillas son introducidas en el dominio cada 40 iteraciones aplicando el esquema (4.12) como se explico en la sección 4.2. Estos nuevos objetos se introducen en los centros de gravedad de las zonas de baja sensibilidad como se muestra en la figura 4.9. Los números (1-12) en la figura 4.9 indican la localización y el orden en que se añaden los nuevos objetos, cada 40 iteraciones (en una forma cíclica). Obsérvese que el funcional de coste aumenta drásticamente en las iteraciones donde se añaden los nuevos objetos, pero disminuye rápidamente siguiendo la dirección de reducción de gradiente de forma consistente con el desarrollo teórico de la técnica de reconstrucción. El funcional de coste tiende a disminuir después de las

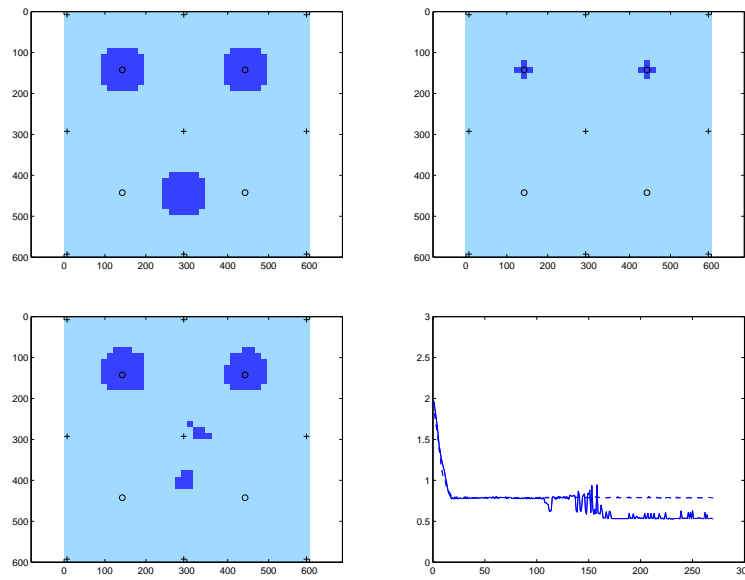


Figura 4.7: Caso 2 *sin* usar la función de banda. Superior izquierda: Permeabilidad real. Superior derecha: Inicialización. Inferior izquierda: Reconstrucción final (iteración 140). Inferior Derecha: Evolución del funcional de coste (línea continua: sin narrowband, línea discontinua: con narrowband como se muestra en la figura. 4.6).

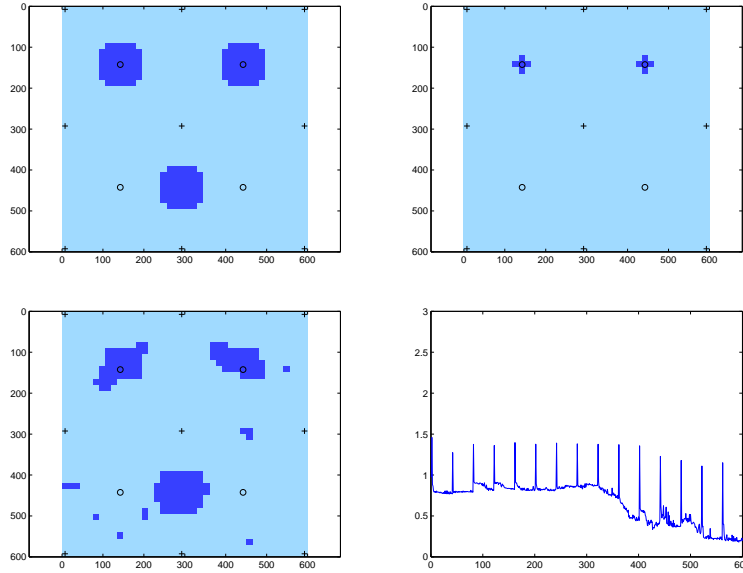


Figura 4.8: Caso 2 usando una función de banda y perturbaciones topológicas. Superior izquierda: Permeabilidad real. Superior derecha: Inicialización. Inferior izquierda: Reconstrucción final (iteración 600). Inferior derecha: Evolución del coste funcional.

perturbaciones topológicas debido a que cuando se añade un objeto en zonas erróneas, el objeto tiende a desaparecer y cuando se añade un objeto en el lugar correcto (donde existe un objeto en el modelo real), el objeto tiende a crecer.

La figura 4.10 muestra la evolución del proceso de reconstrucción en algunas iteraciones. Obsérvese que una nueva forma se ha creado en la segunda imagen de la columna izquierda (iteración 321) en la localización 9 numerada en la figura 4.9 la cual crece continuamente hasta que alcanza su forma final en la localización correcta del tercer objeto (localizado en una zona de baja sensibilidad) en la imagen inferior derecha (iteración 387). Debido a que en este ejemplo se aplica la función de banda (narrowband), las correcciones se concentran cerca de los objetos existentes, de manera que el funcional de coste puede ser reducido por el crecimiento de estas semilla. Por lo tanto aplicando la estrategia de perturbaciones topológicas, se evitan los mínimos locales sin usar la corrección global. También es importante destacar que el segundo nuevo objeto introducido en la iteración 360 (imagen superior derecha) en la

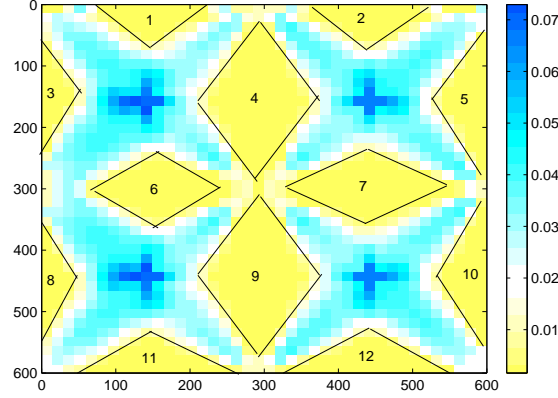


Figura 4.9: Localizaciones donde se añaden los nuevos objetos en el esquema de perturbaciones topológicas (numeradas en el orden en que se añaden durante el algoritmo).

localización numerada como 10 en la figura 4.9 es reducido por el algoritmo hasta que desaparece en la iteración 363. Esto demuestra que nuevos objetos introducidos en lugares erróneos son removidos automáticamente por el algoritmo después de pocas iteraciones. Además, se puede observar que pequeños restos de los nuevos objetos eliminados por el algoritmo permanecen en el dominio, pero poseen un tamaño tan pequeño que no generan un aumento del funcional de coste.

Una estrategia alternativa para caracterizar regiones de baja sensibilidad es *añadir objetos semillas (perturbaciones topológicas) al comienzo de la reconstrucción* en los centros de gravedad de las zonas de baja sensibilidad (en este caso 12, ver figura 4.9) de la inicialización. En la figura 4.11 se muestra la reconstrucción aplicando esta estrategia para el caso 2 *usando y sin usar la función de bandas (narrowband)*. Como era de esperar de los resultados numéricos anteriores, los nuevos objetos tienden a desaparecer (cuando no están en lugares donde existe un objeto en el modelo real) ó tienden a crecer (cuando están localizados en la posición correcta). La figura muestra en la primera fila a la izquierda la permeabilidad real, y a la derecha la inicialización que incluye los 12 nuevos objetos (objetos semillas) y las dos regiones correspondientes a la información previa proveniente de los registros de los pozos. En la fila del medio a la izquierda se muestra el resultado final obtenido

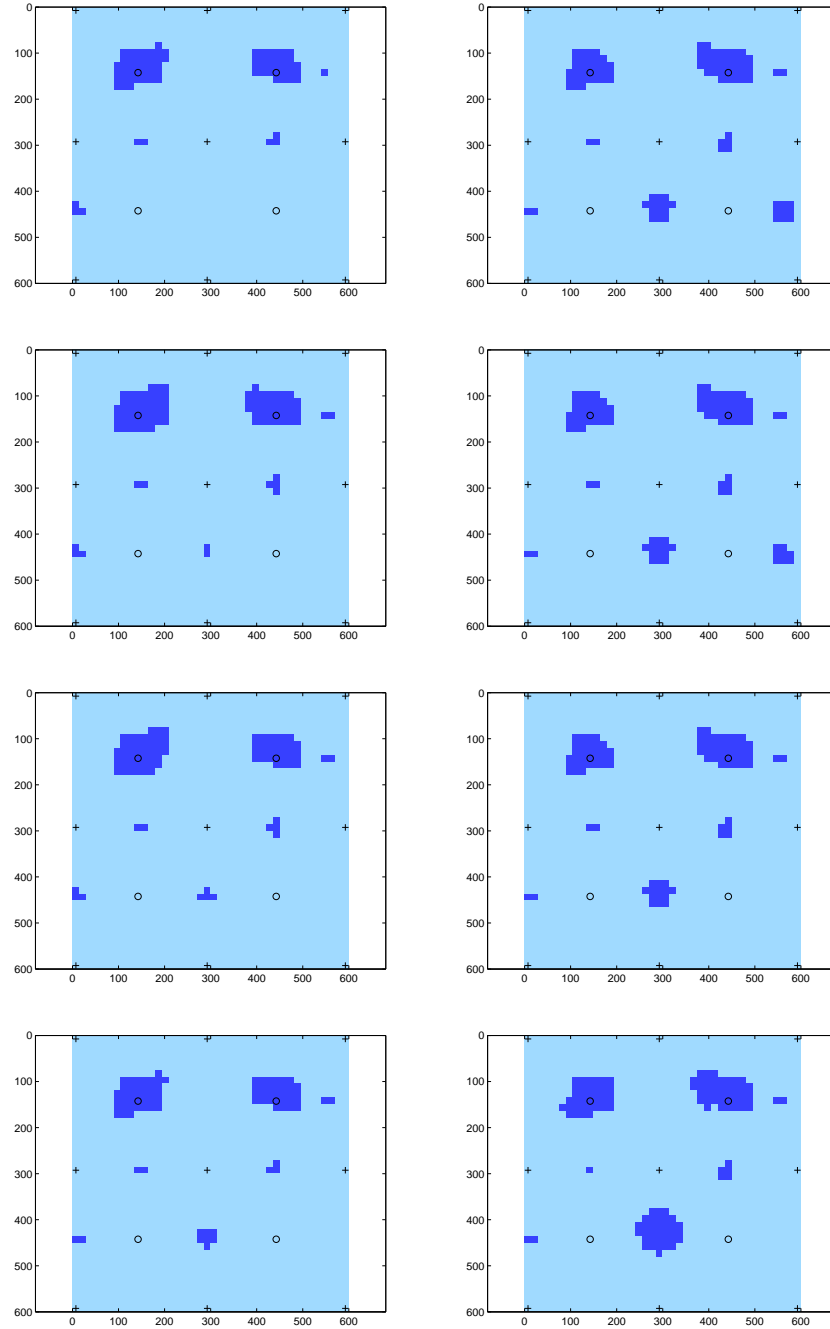


Figura 4.10: Evolución de formas para el caso 2 usando la función de banda y aplicando la estrategia de perturbación topológica. Columna izquierda desde arriba hacia abajo: después de 318, 321, 324 y 333 iteraciones. Columna derecha desde arriba hacia abajo : después de 360, 362, 363 y 387 iteraciones.

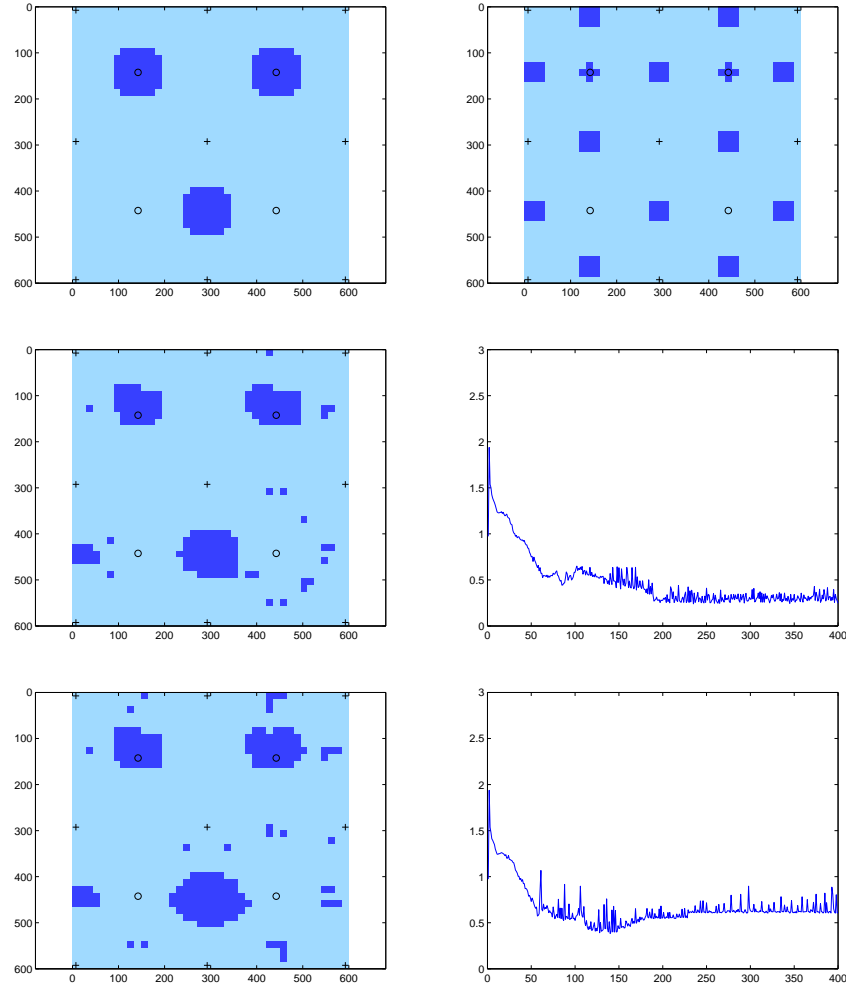


Figura 4.11: Reconstrucción introduciendo los 12 nuevos objetos de las zonas de baja sensibilidad en la inicialización. Superior izq.: Permeabilidad real. Superior derecha: Inicialización. Fila central, reconstrucción aplicando la técnica de narrowband. Izquierda: resultado final, derecha: evolución del funcional de coste. última fila, reconstrucción sin aplicar la técnica de narrowband. Izquierda: resultado final, derecha: evolución del funcional de coste.

usando la función de banda, y a la derecha se encuentra la evolución del funcional de coste. En la última fila se observan resultados análogos a la fila del medio pero sin usar la función de banda. Ambas estrategias son capaces de generar una buena aproximación final de la permeabilidad real, pero muestra varios pequeños objetos en el dominio, principalmente localizados en zonas de baja sensibilidad. El coste final en el caso donde se aplica la función de bandas es ligeramente menor que el coste final obtenido cuando no se usan la función de bandas. En ambos casos se estabiliza el funcional de coste y se obtiene un coste mínimo razonablemente aceptable.

Los resultados obtenidos en el último ejemplo de esta sección, se muestran en la figura 4.12. Aquí se plantea la reconstrucción de las formas, valores y adicionalmente de un objeto localizado en una zona de baja sensibilidad, ver mapa de sensibilidad en la figura 4.2. En la primera fila se observa la permeabilidad real o de referencia (izquierda), la inicialización con 300 mD en la zona de lutita y 1300 mD en la zona de arena (derecha). En la segunda fila se muestra la reconstrucción final y la evolución del residuo. Durante las primeras 800 iteraciones se busca el valor de permeabilidad y la formas, luego se introducen nuevos objetos desde la iteración 800 cada 40 iteraciones, en zonas de baja sensibilidad. Se puede observar que en la reconstrucción final se obtiene el objeto localizado en la zona de baja sensibilidad pero además se reconstruyen otros pequeños objetos en otras zonas de baja sensibilidad que no existen en el mapa de permeabilidad real o de referencia. En la tercera fila se observa la evolución de los valores de permeabilidad en la zona de lutita y de arena.

En términos generales se puede afirmar que la estrategia de aplicar la función de bandas funciona bien pero podría tener un mínimo local en algunas situaciones. La eliminación de la función de bandas permite la creación de nuevos objetos en zonas de alta sensibilidad evitando los mínimos locales. Por lo tanto, esta estrategia genera buenas reconstrucciones si los objetos ocultos están localizados en zonas de alta sensibilidad. Sin embargo, la técnica de no aplicar o eliminar la función de bandas no trabaja bien si los objetos ocultos se encuentran en zonas de baja sensibilidad. Esto es debido a que las direcciones del gradiente están concentradas en regiones de alta sensibilidad cuando no se usa la función de bandas. En estos casos se puede aplicar las estrategias de añadir objetos (semillas) y aplicar la función de banda para mejorar los resultados.

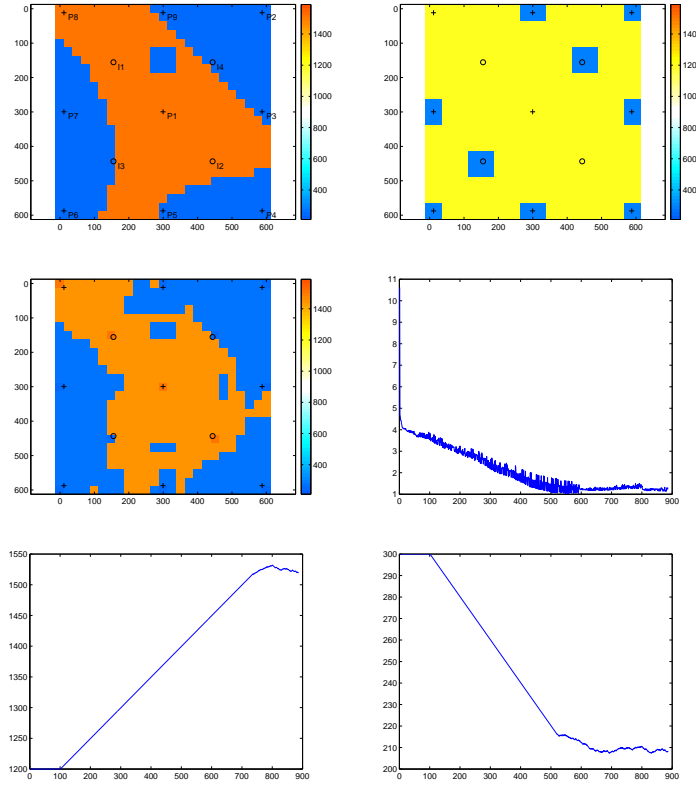


Figura 4.12: Formas y valor promedio añadiendo objetos. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha). Tercera fila: Evolución de la permeabilidad en la zona de arena (izquierda); evolución de la permeabilidad en la zona de lutita (derecha)

4.3. Reconstrucción de canales

Con el objetivo de probar el comportamiento de varias de las nuevas técnicas descritas en secciones anteriores, en esta sección se combinan algunas de estas técnicas en diferentes situaciones. En esta sección se estudian dos ejemplos donde se buscan reconstruir valores de permeabilidad y objetos en zonas del yacimiento como canales con diferentes formas. En la primera estrategia del primer ejemplo se añade un canal inclinado, según la tendencia del pequeño objeto encontrado y en la segunda estrategia se añade un canal horizontal para evaluar la respuesta del algoritmo. El segundo ejemplo que se estudia en esta parte intenta reconstruir un modelo de permeabilidad con un canal horizontal y se plantean dos estrategias.

En el primer ejemplo se busca reconstruir las formas y valor promedio de la distribución de permeabilidad en un yacimiento con 2 litofacies. En el primer caso de este ejemplo, que se muestra en la figura 4.13 se intentan reconstruir los valores y las formas incluyendo un canal con una inclinación de 45° . El canal se introduce modificando la función conjunto de nivel de manera análoga a la presentada en los capítulos anteriores (ver sección 4.2). En la primera fila se presentan la permeabilidad real o de referencia (izquierda) y la inicialización (derecha). En la segunda fila se muestran la reconstrucción final (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha). En esta reconstrucción se puede observar que parte del canal buscado se encuentra en la zona de alta sensibilidad, dando una idea de la orientación real del canal. Las partes del canal ubicadas en zonas de baja sensibilidad no se reconstruyen bien. En la tercera fila se muestra la evolución de los valores de permeabilidad en las zonas de arena (izquierda) y de lutita (derecha).

En la segunda etapa del primer ejemplo se trata de reconstruir la forma del canal que no se logró obtener en la primera etapa del primer caso. Por esto la segunda etapa se inicializa con la reconstrucción final de la primera etapa añadiendo un canal a lo largo del yacimiento con la teoría correspondiente a la metodología de introducir nuevos objetos presentada anteriormente. Los resultados para la primera estrategia se muestran en la figura 4.14. En la primera fila se muestra la permeabilidad real o de referencia (izquierda) y la inicialización que corresponde a la reconstrucción final del tercer caso. En la segunda fila de la figura 4.14 se muestra la reconstrucción final y la evolución del funcional de coste. En la figura 4.15 se muestra la respuesta del algoritmo al añadir un canal horizontal en la reconstrucción final del tercer ejemplo. Los resultados de la segunda estrategia se muestran en la segunda fila de la figura

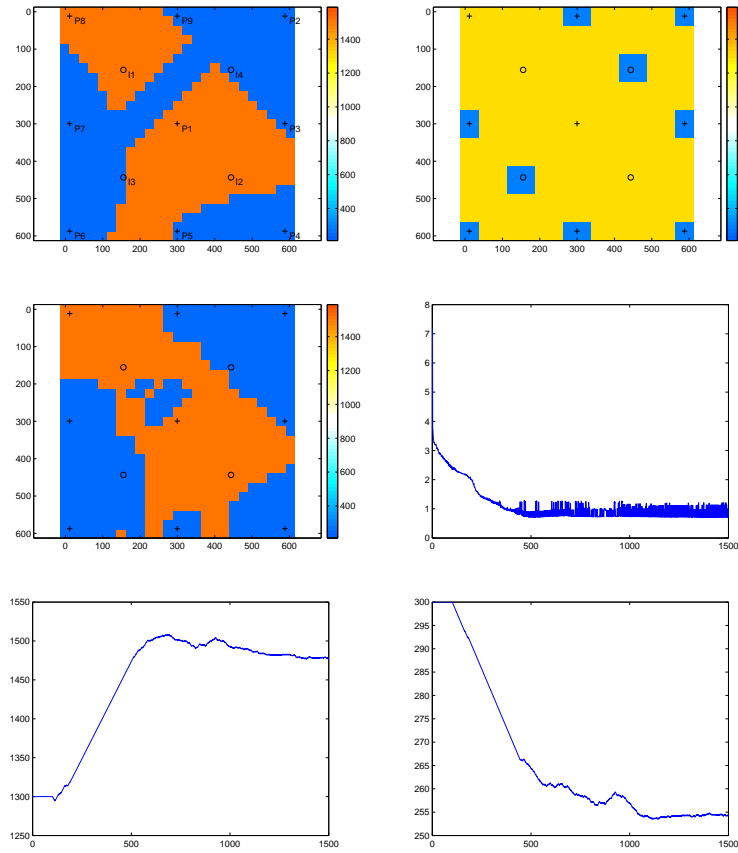


Figura 4.13: Canales. Primer ejemplo numérico, Formas y valor promedio, primera etapa. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha). Tercera fila: Evolución de la permeabilidad en la zona de arena (izquierda); evolución de la permeabilidad en la zona de lutita (derecha)

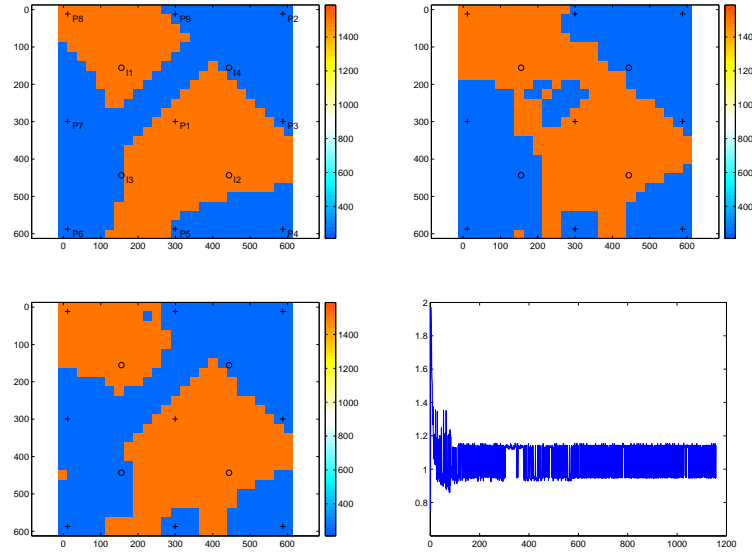


Figura 4.14: Canales. Primer ejemplo numérico, Formas y valor promedio, segunda etapa, primera estrategia. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha).

4.15 donde se puede ver la reconstrucción final (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha). Según los resultados de esta segunda estrategia se observa que el algoritmo no es capaz de corregir el ángulo del canal añadido. Esto se debe a la no unicidad de la solución característica de este tipo de problemas. De forma que existen varias soluciones que reducen el funcional de coste, encontrándose mínimos locales.

El segundo ejemplo que se estudia en esta parte intenta reconstruir un modelo de permeabilidad con un canal horizontal y se plantean dos estrategias. En la primera estrategia, primera etapa del proceso de reconstrucción de este ejemplo se buscan los valores de permeabilidad y las formas. En la figura 4.16 se observan los resultados obtenidos. En la primera fila de esta figura se observa la permeabilidad real o de referencia (izquierda) y la inicialización (derecha). En la segunda fila se observa la reconstrucción final de la permeabilidad (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha). La reconstrucción final junto con la información geológica previa pueden dar indicios de la existencia de un canal. En la tercera fila se observa la evolución

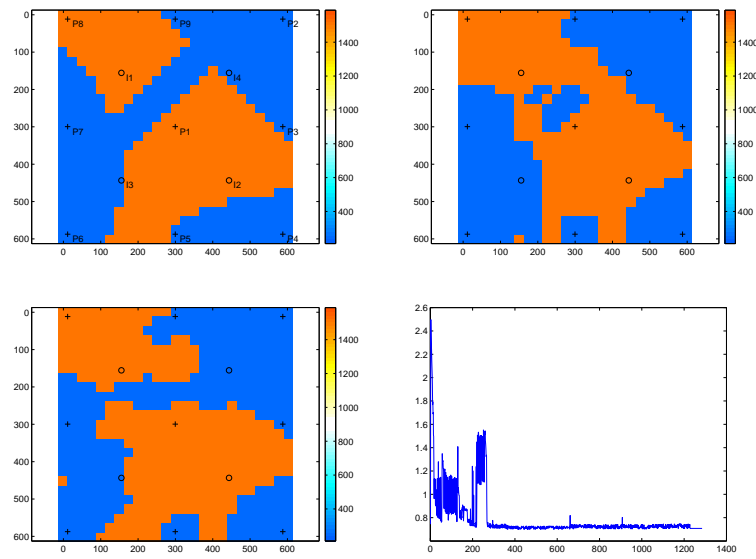


Figura 4.15: Primer ejemplo numérico, Formas y valor promedio, segunda etapa, segunda estrategia. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha).

de los valores en la zonas de arena (izquierda) y lutita (derecha).

En la segunda etapa de la primera estrategia, del segundo ejemplo se añade un canal horizontal en la reconstrucción final de la primera etapa. En la figura 4.17 se muestran los resultados de la primera estrategia. En la primera fila se observa la permeabilidad real o de referencia y la inicialización que corresponde a la reconstrucción final de la primera etapa. En la segunda fila se observa la reconstrucción final y la evolución del residuo. Como se puede observar se estabiliza el residuo rápidamente. En la segunda estrategia se añaden nuevos objetos cada 40 iteraciones desde la iteración 800 en zonas de baja sensibilidad para intentar reconstruir el canal. Los resultados de esta estrategia se muestran en la figura 4.18. En la primera fila se muestra la permeabilidad real o de referencia (izquierda) y la inicialización (derecha). En la segunda fila se muestra la reconstrucción final (izquierda) y la evolución del coste (derecha).

En este capítulo se ha propuesto una técnica para encontrar objetos geológicos en zonas de baja sensibilidad, haciendo uso de perturbaciones topológicas en combinación con la aplicación de la función de bandas. Los nuevos objetos (semillas) son colocados en zonas de baja sensibilidad y evolucionan de forma natural, creciendo en los casos que el objeto está bien localizado y desapareciendo en los casos que el objeto está en la posición incorrecta. En la caracterización de canales se pudo observar que el método genera mínimos locales cuando se trata de encontrar la dirección del canal sin utilizar información geológica previa, debido a la baja sensibilidad de algunas zonas del yacimiento. Por lo tanto para complementar la correcta descripción de los canales no solo se requiere la aplicación de la técnica de perturbaciones topológicas, también es necesario incluir datos generales de las características que se pueden tener del canal para así generar una reconstrucción que se adapta a esta información previa normalmente disponible.

4.4. Publicaciones y presentaciones

Publicaciones:

1. (2006) Sensitivity studies for shape reconstruction in reservoir characterization using level sets, R. Villegas, M. Kindelan, O. Dorn, M. Moscoso, Proceedings "Inverse problems: modelling and simulation", Fethiye, Turkey, May 29-June 02, 2006, (pp1-4).

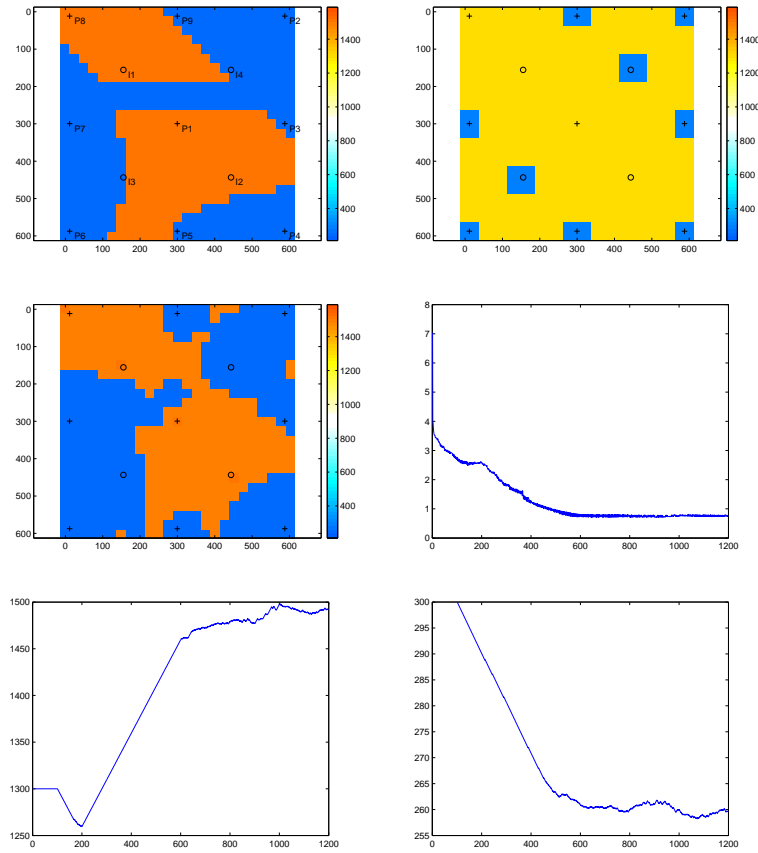


Figura 4.16: Canales. Segundo ejemplo numérico, Formas y valor promedio, primera etapa. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha). Tercera fila: Evolución de la permeabilidad en la zona de arena (izquierda); evolución de la permeabilidad en la zona de lutita (derecha)

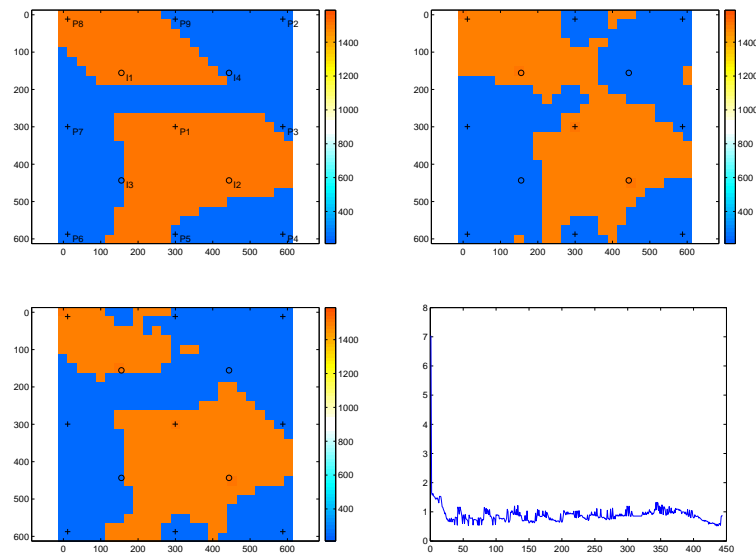


Figura 4.17: Canales. Segundo ejemplo numérico, Formas y valor promedio, segunda etapa, primera estrategia. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha).

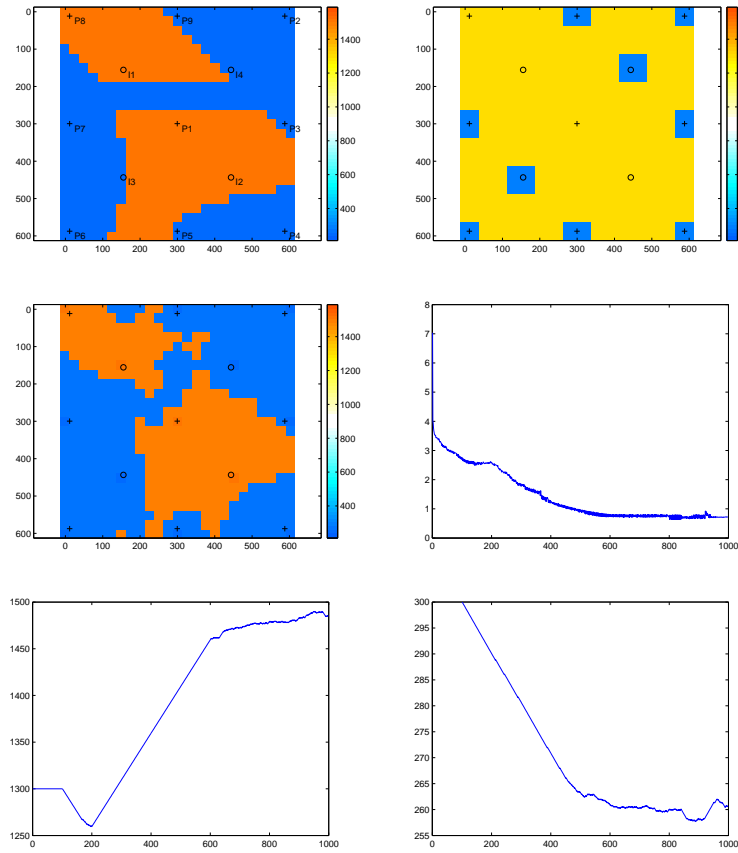


Figura 4.18: Canales. Segundo ejemplo numérico, Formas y valor promedio, segunda estrategia. Primera fila: Permeabilidad real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Permeabilidad final (izquierda); evolución del coste (derecha). Tercera fila: Evolución de la permeabilidad en la zona de arena (izquierda); evolución de la permeabilidad en la zona de lutita (derecha)

2. (2007) Imaging low sensitivity regions in petroleum reservoirs using topological perturbations and level sets, R. Villegas, O. Dorn, M. Kindelan and M. Moscoso, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*.

Presentaciones

1. (2006) May 29 - June 2 Shape reconstruction in reservoir characterization from two-phase flow data using level sets, (with M. Kindelan, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, presented by M. Kindelan), 3rd International Conference 'Inverse Problems: Modeling and Simulation', Fethiye, Turkey, Special session on 'Level set methods for inverse problems'(org. H. Ben Ameer).
2. (2006), July 10-14 Characterization of reservoir lithofacies in low sensitivity zones (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) European Conference on Mathematics for Industry ECMI 2006, Leganes-Madrid, Spain.

Capítulo 5

Caracterización de yacimientos con más de dos litofacies

En este capítulo se presenta un nuevo método, para la caracterización y reconstrucción de formas geológicas en el proceso de ajuste histórico automático en yacimientos con más de dos tipos de roca. El uso no estándar del método de conjunto de nivel para la representación de formas geológicas con múltiples valores para la aplicación de ajuste histórico es una novedad en el área de la ingeniería de yacimientos [148].

Hay muchas aplicaciones para resolver problemas inversos asociados a reconstrucción de formas donde la distribución de parámetros tiene más de dos posibles valores. En este caso la formulación de conjunto de nivel para la evolución de las formas necesita ser adaptada.

En secciones anteriores se ha presentado la reconstrucción de medios binarios (dos tipos de roca). Sin embargo en la literatura se encuentran extensiones de reconstrucción de más de dos zonas usando el método de conjunto de nivel, en varias aplicaciones. Una de estas extensiones usa niveles múltiples de una función de conjuntos de nivel, con lo que se evoluciona solo una función de conjunto de nivel para caracterizar más de dos formas. Por otra parte se encuentran las formulaciones con más de una función conjunto de nivel. Ambas extensiones serán explicadas en el Apéndice 3, junto con las limitaciones que tienen para la aplicación en caracterización de yacimientos usando datos de producción. Con la idea de superar estas limitaciones en este capítulo se presenta una nueva modificación de las metodologías disponibles en la literatura para optimizar la caracterización de yacimientos con más de dos litofacies usando el método de conjuntos de nivel.

5.1. Varias funciones de conjunto de nivel

Para caracterizar adecuadamente yacimientos con más de dos litofacies y manejar adecuadamente las zonas críticas ó de solapamiento (definido abajo), en esta sección se presenta la formulación matemática desarrollada en esta tesis para describir la distribución de las formas geológicas en un yacimiento con más de dos litofacies. Aquí se asume que los valores de los parámetros K_ν son *constantes dentro de cada región*. Como ejemplo aquí se desarrolla la teoría para un yacimiento con cuatro litofacies. El caso general de más que cuatro litofacies es análogo. Para describir la distribución de las cuatro (en general n) formas en el dominio Ω se definen tres (en general $n - 1$) funciones de conjunto de nivel ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 combinadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
K = & K_1(1 - H(\psi_1))H(\psi_2)H(\psi_3) + K_2(1 - H(\psi_2))H(\psi_1)H(\psi_3) \\
& + K_3H(\psi_1)H(\psi_2)(1 - H(\psi_3)) + K_4H(\psi_1)H(\psi_2)H(\psi_3) \\
& + \frac{K_1 + K_2}{2} H(\psi_3)(1 - H(\psi_1))(1 - H(\psi_2)) \\
& + \frac{K_2 + K_3}{2} H(\psi_1)(1 - H(\psi_2))(1 - H(\psi_3)) \\
& + \frac{K_1 + K_3}{2} H(\psi_2)(1 - H(\psi_1))(1 - H(\psi_3)) \\
& + \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3} (1 - H(\psi_1))(1 - H(\psi_2))(1 - H(\psi_3)). \quad (5.1)
\end{aligned}$$

donde los valores del contraste K_ν , $\nu = 1, \dots, 4$ se asumen constantes dentro de cada región. Las cuatro litofacies diferentes son codificadas como

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 \leq 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_3 > 0 \} \\
D_2 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_2 \leq 0 \quad \text{y} \quad \psi_1 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_3 > 0 \} \\
D_3 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_3 \leq 0 \quad \text{y} \quad \psi_1 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 > 0 \} \\
D_4 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_3 > 0 \}. \quad (5.2)
\end{aligned}$$

Observe que estos cuatro regiones no cubren completamente el dominio Ω ya que existen zonas que no corresponden a ninguna de las zonas definidas anteriormente. En estas zonas (que se llaman en esta tesis “zonas críticas”) más de una función de conjuntos de nivel son negativas y entonces no es posible identificar estas zonas únicamente como una de las litofacies dadas.

Estas zonas críticas obtienen un tratamiento especial en nuestro algoritmo. Esto genera una cobertura completa del dominio Ω donde cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ es parte de exactamente una de las cuatro formas D_ν o de una zona crítica. Observe también que esta representación es diferente de todas las representaciones que hemos encontrado en la literatura y que son descritas en Apéndice 3, ver también [48].

Se define $\mathbf{b} = (K_1, \dots, K_4)$ que se asume conocido. (La teoría se generaliza fácilmente al caso donde también estos parámetros son desconocidos utilizando las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores). Las incógnitas son las tres funciones de conjunto de nivel ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Se escribe el funcional de coste en la forma

$$\mathcal{J}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)\|^2. \quad (5.3)$$

En este punto se busca una familia de leyes de evolución que aseguran la disminución del funcional de coste. Estas leyes son

$$\frac{d\psi_1}{dt} = f_1(\mathbf{x}, t, \dots); \quad \frac{d\psi_2}{dt} = f_2(\mathbf{x}, t, \dots); \quad \frac{d\psi_3}{dt} = f_3(\mathbf{x}, t, \dots). \quad (5.4)$$

f_1, f_2 y f_3 son valores reales, que serán calculados usando la dirección de descenso del residuo. Usando de nuevo la regla de la cadena, se tiene formalmente

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{\partial K}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt}. \quad (5.5)$$

Desarrollando y expresando $\frac{d\mathcal{J}}{dK}$ en forma de producto escalar dependiente del operador adjunto, se tiene:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \frac{\partial K}{\partial \psi_1} f_1 + \frac{\partial K}{\partial \psi_2} f_2 + \frac{\partial K}{\partial \psi_3} f_3 \right\rangle_P. \quad (5.6)$$

Para calcular $\frac{\partial K}{\partial \psi_1}$, $\frac{\partial K}{\partial \psi_2}$ y $\frac{\partial K}{\partial \psi_3}$ se usa la expresión general $\frac{\partial K}{\partial \psi_l}$ en función de m y n de los pares $\{l, m, n\}$ genéricos dados por $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$ y $\{3, 1, 2\}$ que salen de (5.1) y son necesarios para resolver la expresión (5.6) quedando:

$$\frac{\partial K}{\partial \psi_l} = K_l(-\delta(\psi_l))H(\psi_m)H(\psi_n) + K_m(-\delta(\psi_l))(1 - H(\psi_m))H(\psi_n)$$

$$\begin{aligned}
& + K_n \delta(\psi_l) H(\psi_m) (1 - H(\psi_n)) + K_4 \delta(\psi_l) H(\psi_m) H(\psi_n) \\
& + \frac{K_l + K_m}{2} H(\psi_n) (-\delta(\psi_l)) (1 - H(\psi_m)) \\
& + \frac{K_m + K_n}{2} \delta(\psi_l) (1 - H(\psi_m)) (1 - H(\psi_n)) \\
& + \frac{K_l + K_n}{2} H(\psi_m) (-\delta(\psi_l)) (1 - H(\psi_n)) \\
& + \frac{K_l + K_m + K_n}{3} (-\delta(\psi_l)) (1 - H(\psi_m)) (1 - H(\psi_n)). \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Por otra parte se escogen las expresiones de f_1 , f_2 y f_3 con el objetivo de asegurar que la derivada del funcional de coste con respecto al tiempo sea negativo, encontrándose de esa forma la dirección de descenso del funcional de coste. La selección viene dada por:

$$f_1 = -(\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)) \frac{\partial K}{\partial \psi_1} \quad (5.8)$$

$$f_2 = -(\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)) \frac{\partial K}{\partial \psi_2} \quad (5.9)$$

$$f_3 = -(\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)) \frac{\partial K}{\partial \psi_3}. \quad (5.10)$$

Haciendo uso de la ecuación (5.7) reemplazando la función delta por la función de bandas, se encuentra una expresión general para calcular f_1 , f_2 y f_3 de la forma:

$$\begin{aligned}
f_l = \chi_{NBD} \cdot \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \right. & -K_l H(\psi_m) H(\psi_n) \\
& + K_m (1 - H(\psi_m)) H(\psi_n) \\
& + K_n H(\psi_m) (1 - H(\psi_n)) + K_4 H(\psi_m) H(\psi_n) \\
& - \frac{K_l + K_m}{2} H(\psi_n) (1 - H(\psi_m)) \\
& + \frac{K_m + K_n}{2} (1 - H(\psi_m)) (1 - H(\psi_n)) \\
& - \frac{K_l + K_n}{2} H(\psi_m) (1 - H(\psi_n)) \\
& \left. - \frac{K_l + K_m + K_n}{3} (1 - H(\psi_m)) (1 - H(\psi_n)) \right\rangle \Big|_{\text{suavizar}}. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

De esta forma hemos encontrado una distribución para la permeabilidad que minimiza el funcional de coste que genera valores intermedios en las regiones críticas. Esta estrategia evita algunos mínimos locales. No obstante, al final de nuestra reconstrucción nos gustaría encontrar un perfil que consiste solo de valores que corresponden a los cuatro litofacies.

Por eso, aplicamos dos estrategias distintas en nuestro algoritmo con el objetivo de eliminar/minimizar estas zonas críticas a lo largo de la evolución.

En la primera estrategia se aplica una penalización que minimiza estas áreas. Durante esta parte de la evolución se modifica la expresión de f_l en las zonas críticas de la forma:

$$f_l \rightarrow f_l + P_l, \quad (5.12)$$

donde P_l viene dado por:

$$\begin{aligned} P_l = C_o \{ & (1 - H(\psi_l))(1 - H(\psi_m))H(\psi_n) \\ & + (1 - H(\psi_l))(1 - H(\psi_n))H(\psi_m) \\ & + (1 - H(\psi_l))(1 - H(\psi_m))(1 - H(\psi_n)) \}_{suavizar}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Aquí los valores usualmente se toman $0 < C_o \ll 1$.

En la segunda estrategia, se seleccionan valores promedios para las áreas críticas al principio y luego durante la evolución se corrige el valor de permeabilidad en estas zonas como se explicó en el capítulo 3.

5.2. Caracterización de yacimientos con más de dos litofacies. Ejemplos Numéricos

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar la técnica de caracterización de formas geológicas en yacimientos con más de dos litofacies. En los ejemplos numéricos que se presentan se asume que la distribución de permeabilidad está formada por cuatro litofacies. Los valores de permeabilidad para las cuatro litofacies corresponden a 200 mili-Darcy (mD) para la primera litofacie, 600 mD para la segunda litofacie, 1000 mD para la tercera litofacie y 2000 mD para la cuarta litofacie. Esto significa que hay contraste entre las regiones. Todos los parámetros físicos del yacimiento se asumen constantes y conocidos, así la única incógnita en estos ejemplos

es la topología de las cuatro regiones, que serán reconstruidas usando los datos de producción. En las reconstrucciones que se muestran en este capítulo las cuatro litofacies se asocian a tres funciones de conjunto de nivel. La idea es evolucionar las tres funciones de conjunto de nivel simultáneamente con las restricciones del paso o máximo número de celdas que cambian de valor de permeabilidad. Los datos del yacimiento, excepto la permeabilidad absoluta, son idénticos a los expuestos en el ejemplo anterior. La dimensión del yacimiento es 600 metros por 600 metros, discretizados en una malla de 25x25 celdas. Hay 9 pozos de producción y 4 de inyección organizados en un arreglo de 4 patrones de 5 pozos.

5.2.1. Evolución de formas

En la primera estrategia de reconstrucción para este ejemplo se inicializa el mapa de permeabilidad con la información de los pozos, es decir se extrapola el valor medido en los pozos en un radio de certidumbre igual a 2 celdas. El valor por defecto es el más repetido entre los 13 pozos presentes en el yacimiento, en el caso de este ejemplo es 600 mD. La primera estrategia consiste en evolucionar cada una de las funciones de conjunto de nivel desde la distribución inicial. Durante la evolución cuando en una celda el valor de más de una función conjunto de nivel es negativa, el valor de la permeabilidad será el promedio de los valores de permeabilidad asociados a cada función conjunto de nivel negativa. Así se crean zonas críticas con gran incertidumbre con nuevos valores de permeabilidad diferentes a los cuatro valores previamente establecidos al inicio del proceso de reconstrucción. En esta parte del algoritmo no se aplican estrategias para minimizar ó eliminar las zonas críticas. Aplicando esta primera estrategia se obtienen los resultados que se presentan en la figura 5.1. En la primera fila se presenta la distribución de permeabilidad real o de referencia (izquierda). La inicialización se muestra a la derecha. En la segunda y tercera fila se presentan las reconstrucciones obtenidas usando dos criterios de paso (máximo número de celdas que cambian de valor de permeabilidad para cada función conjunto de nivel). En la segunda fila la reconstrucción de la izquierda corresponde al primer criterio de paso (máximo 7 celdas) y sin reescalar la función conjunto de nivel; a la derecha se encuentra la evolución del residuo para este caso. En la tercera fila la reconstrucción de la izquierda corresponde al segundo criterio de paso (máximo 4 celdas) y reescalando la función conjunto de nivel a un valor máximo de 200 o un valor mínimo de -200 en cada iteración. A la derecha se

muestra la evolución del residuo para este caso. El primer criterio donde se permite cambiar mayor número de celdas (7 celdas), genera un residuo mínimo menor de 0.49 pero una tendencia a incrementar el residuo. En cambio para el segundo criterio donde se permite cambiar solo 4 celdas y que genera un residuo mínimo igual a 1.06, la tendencia del residuo es estable ya que tiene menos libertad para desviarse de la dirección de descenso del funcional de coste, alcanzando un mínimo local. Adicionalmente en estas reconstrucciones se puede observar zonas con valores de permeabilidad diferente a los cuatro valores presentes en la inicialización, esto se genera por la coincidencia de valores negativos en más de una función conjunto de nivel. Este valor ó valores ficticios pueden ser corregidos en las zonas críticas usando las técnicas explicadas anteriormente (en la sección 3.2.1) y que serán utilizadas en los algoritmos que se presentan en las siguientes secciones.

5.2.2. Evolución de formas y corrección de valores en zonas críticas

La segunda estrategia para este ejemplo consiste en corregir el valor de permeabilidad en las zonas críticas, asociadas a una mayor incertidumbre, simultáneamente con la evolución de las formas para las tres funciones de conjunto de nivel. En los casos donde más de una función conjunto de nivel es negativa el valor de la permeabilidad será corregido y calculado como se ha discutido en el capítulo 3. De esta forma se corrigen los valores en zonas críticas con nuevos valores de permeabilidad diferentes a los cuatro valores previamente establecidos al inicio del proceso de reconstrucción (excepto en las zonas D_1 , D_2 , D_3 y D_4 donde se conservan los valores).

En la figura 5.2 se observan diferentes reconstrucciones para el ejemplo con cuatro litofacies (tres funciones de conjunto de nivel) corrigiendo el valor de las zonas críticas al momento de aparecer. En la primera fila se observa la distribución de permeabilidad real o de referencia y la inicialización utilizada. En la segunda y tercera fila se muestran la reconstrucción final y la evolución del funcional de coste con pasos de 2 y 4 celdas respectivamente (errores mínimos 1.10 y 0.86). Durante la evolución de estos casos no se restringen los valores máximos y mínimos de las funciones conjunto de nivel. En la cuarta y quinta fila se presentan las reconstrucciones finales y la evolución del funcional de coste con pasos de 2 y 4 celdas respectivamente (errores mínimos 0.89 y 0.92) restringiendo los valores máximos y mínimos de la

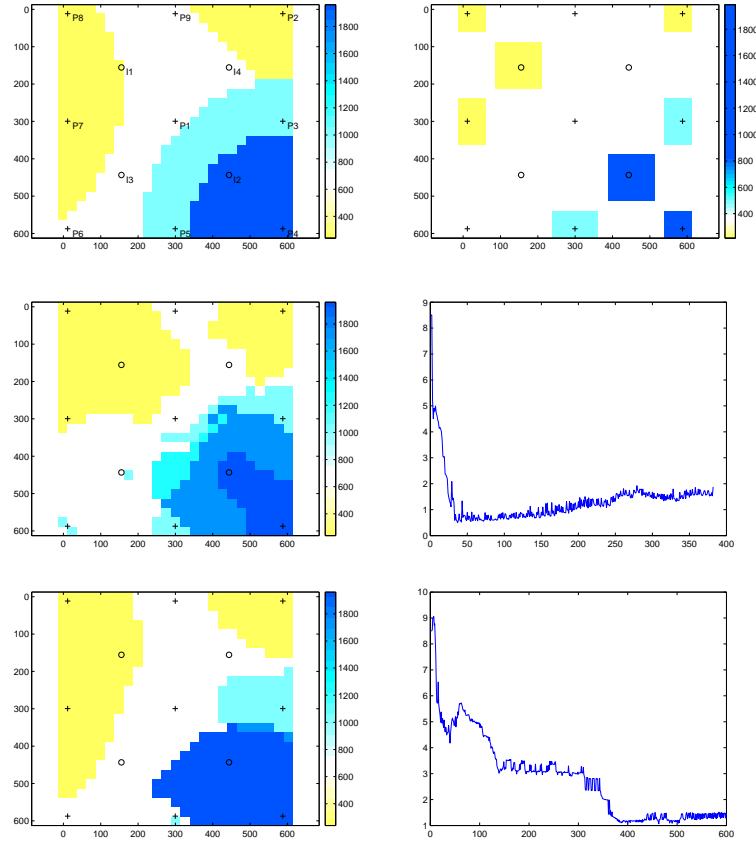


Figura 5.1: Más de dos litofacies. Primera estrategia, con zonas críticas. Primera fila: Forma real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Reconstrucción final del primer criterio de paso (Izquierda) y evolución del funcional de coste (derecha). Tercera fila: Reconstrucción final del segundo criterio de paso (izquierda) y evolución del funcional de coste (derecha).

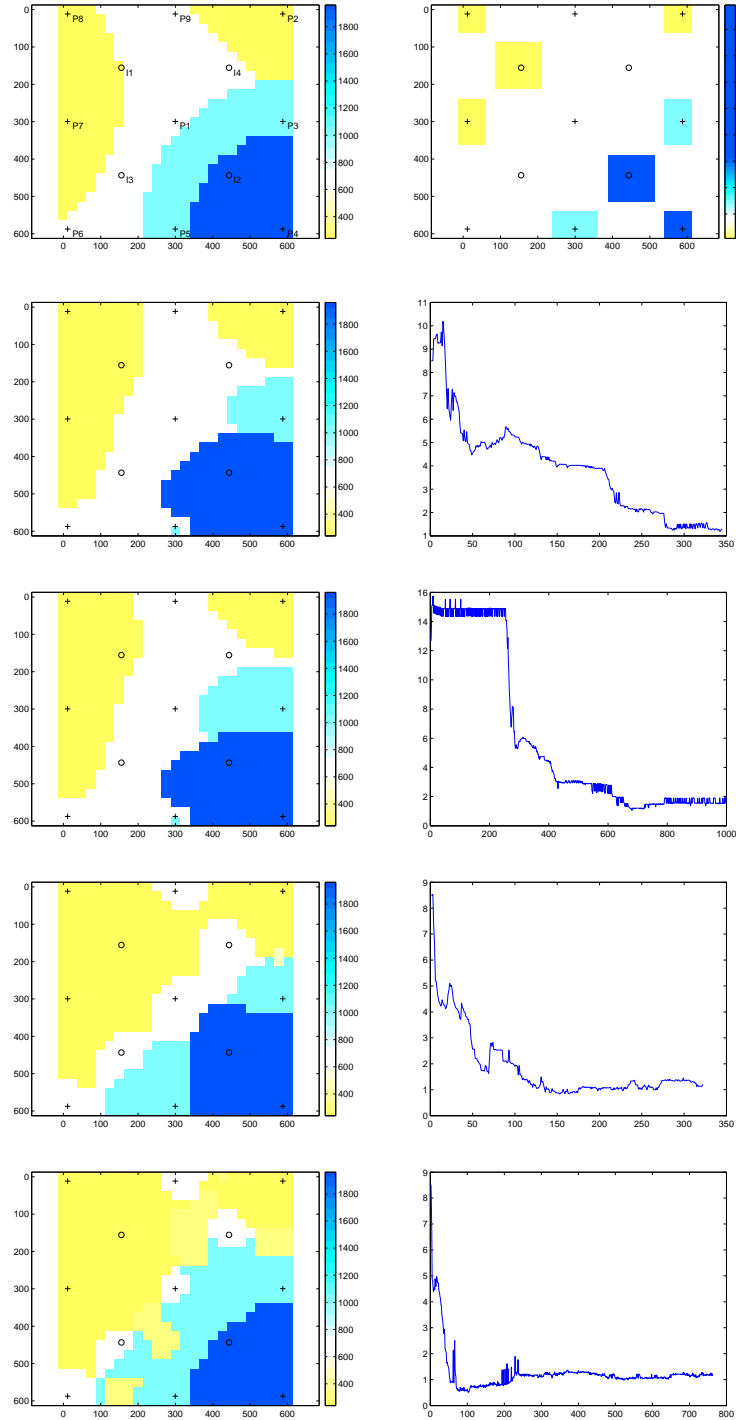


Figura 5.2: Más de dos litofacies. Segunda estrategia, corrección de zonas críticas. Primera fila: Forma real (izq.); inicialización (der.). Segunda fila: Reconstrucción final, primer criterio (izq.) y evolución del coste (der.). Tercera fila: Reconstrucción final, segundo criterio (izq.) y evolución del coste (der.). Cuarta fila: Reconstrucción final, tercer criterio (izq.) y evolución del coste (der.). Quinta fila: Reconstrucción final, cuarto criterio (izq.) y evolución del coste (der.).

función conjunto de nivel.

Como se puede observar en estas reconstrucciones se evita la presencia de zonas críticas con valores de permeabilidad ficticios o diferentes a los cuatro valores previamente determinados del proceso de reconstrucción. En esta parte del trabajo se corrigen los valores ficticios a medida que van apareciendo. También es importante destacar que las reconstrucciones tienen valores de residuo mínimo parecidos a pesar de la diferencia que existe en las reconstrucciones. Esto es debido a la no unicidad de la solución en este tipo de problemas, y a la presencia de múltiples mínimos locales.

5.2.3. Evolución de formas y corrección de valores en zonas críticas con regularización adicional

En esta sección se muestra un ejemplo donde, al igual que en la sección anterior, se corrigen los valores de permeabilidad ficticios asociados a las zonas críticas y además se aplica una regularización adicional donde se minimiza el área de las zonas críticas modificando los valores de la función conjunto de nivel (ver las ecuaciones (5.12) y (5.13)).

En la reconstrucción que se muestra en la figura 5.3 aplicando regularización de las formas y corrección de los valores ficticios se obtiene un residuo mínimo de 1.35 en 480 iteraciones. Con la idea de evaluar el comportamiento del algoritmo en una situación ligeramente diferente se generan los resultados que se muestran en la figura 5.3. En la primera fila se observa la permeabilidad real o de referencia (izquierda), donde la litofacie con permeabilidad 1000 mD cubre mayor parte del yacimiento; la inicialización se muestra en la figura de la derecha. En la segunda fila se observa la reconstrucción final (izquierda) y la evolución del funcional de coste (derecha). Como se puede observar, en este caso también se llega a un mínimo local y no se reconstruye del todo la zona con permeabilidad 1000 mD.

5.2.4. Evolución de formas con diferentes inicializaciones

En esta sección se muestran las reconstrucciones obtenidas con una inicialización diferente a la inicial presentada en las reconstrucciones anteriores. En este caso la inicialización corresponde a la reconstrucción final que se muestra en la segunda fila de la figura 5.1. En esta etapa se corrige el valor

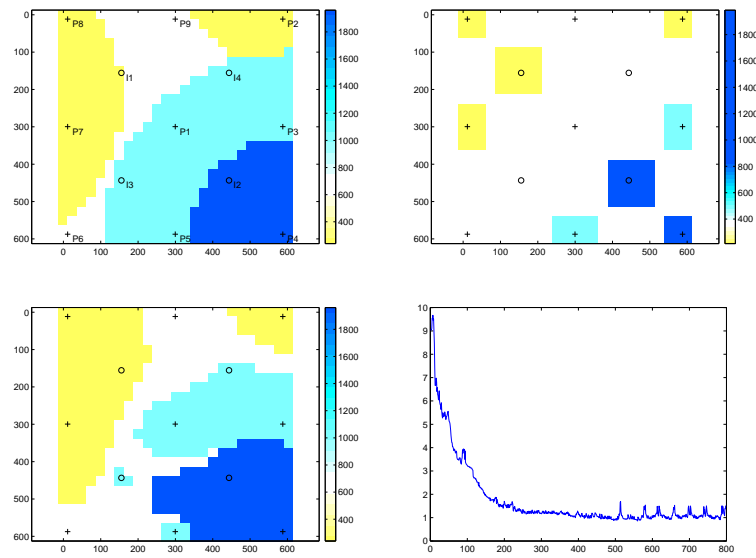


Figura 5.3: Más de dos litofacies. Tercera estrategia, corrección de zonas críticas y regularización. Superior izquierda: Forma real. Superior derecha: inicialización. Inferior izquierda: Reconstrucción final. Inferior derecha: evolución del funcional de coste.

ficticio encontrado en la zona crítica al mismo tiempo de la evolución de la forma. Se aplican dos pasos diferentes para la corrección del valor ficticio que difieren por un factor 20.

Como se puede observar en la figura 5.4 el paso más grande produce un valor de coste mínimo (0.5622) menor que el valor o de coste obtenido usando el paso más pequeño (0.89). Se observa que la forma ficticia no esta completamente corregida en ambas reconstrucciones, aunque en ambas disminuye el funcional de coste y el valor ficticio se acerca al valor de la litofacie correcta.

5.2.5. Evolución de formas y corrección de zonas críticas usando inicializaciones geoestadísticas

En esta sección se presentan reconstrucciones generadas usando 10 diferentes inicializaciones geoestadísticas, todas con la misma probabilidad de ocurrencia y basadas en los datos de permeabilidad en las localizaciones de los pozos y en la interpretación de los variogramas asociados. La generación de estas inicializaciones se ha hecho usando las librerías de Fortran del programa GSLIB de forma análoga a la sección 2.4 con la única diferencia que aqui se usan cuatro valores de permeabilidad en lugar de dos para truncar las simulaciones gaussianas generadas. En la figura 5.5 se presenta la distribución de permeabilidad real o de referencia (superior izquierda), la evolución del funcional de coste para las 10 reconstrucciones (superior derecha), además de los valores iniciales del funcional de coste para las diez inicializaciones geoestadísticas gaussianas y la determinística (inferior izquierda) y los valores finales del funcional de coste para las diez reconstrucciones obtenidas desde las inicializaciones gaussianas y la determinística (inferior derecha).

En la figura 5.6 se muestran las inicializaciones y las reconstrucciones obtenidas para las primeras cinco inicializaciones geoestadísticas. La primera fila corresponde a la primera inicialización (izquierda) y la primera reconstrucción (derecha) asociada, así la segunda fila muestra la segunda inicialización y la segunda reconstrucción asociada, y así sucesivamente hasta el quinto caso y reconstrucción. De forma análoga en la figura 5.6 se presentan los resultados obtenidos con las inicializaciones 6 hasta la 10. En ambas figuras en la columna izquierda se observan las inicializaciones y en la columna derecha las reconstrucciones finales obtenidas con cada inicialización.

Como se puede observar de los resultados mostrados, con las estrategias aplicadas se obtienen mapas de permeabilidad muy parecidos pero no nece-

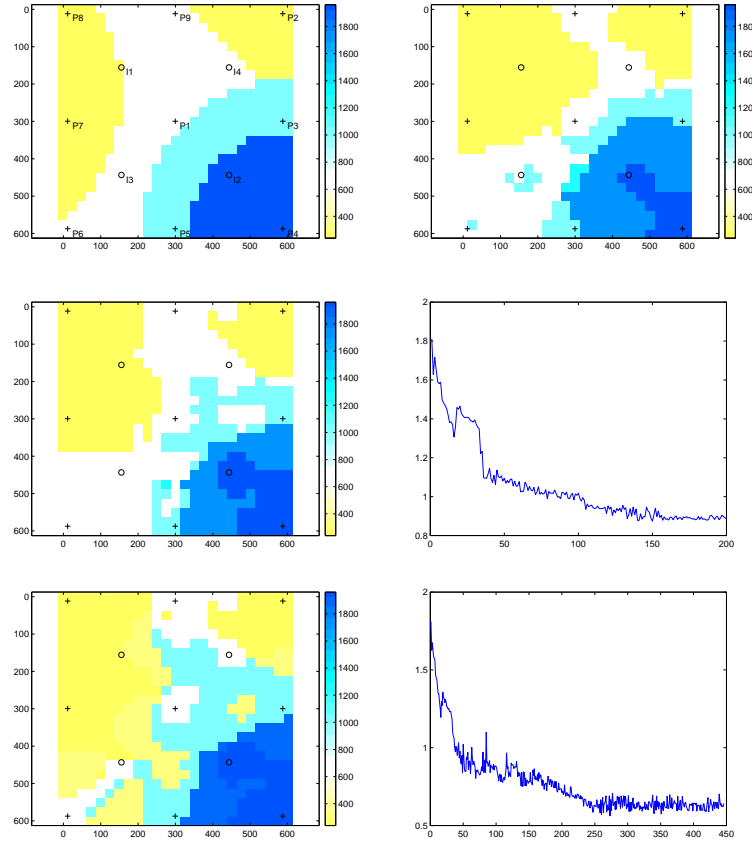


Figura 5.4: Más de dos litofacies. Primera estrategia, Etapa I. Primera fila: Forma real (izquierda); inicialización (derecha). Segunda fila: Reconstrucción final, paso mínimo (Izquierda); evolución del funcional de coste, paso mínimo (derecha). Tercera fila: Reconstrucción final, paso máximo (izquierda); evolución del funcional de coste, paso máximo (derecha).

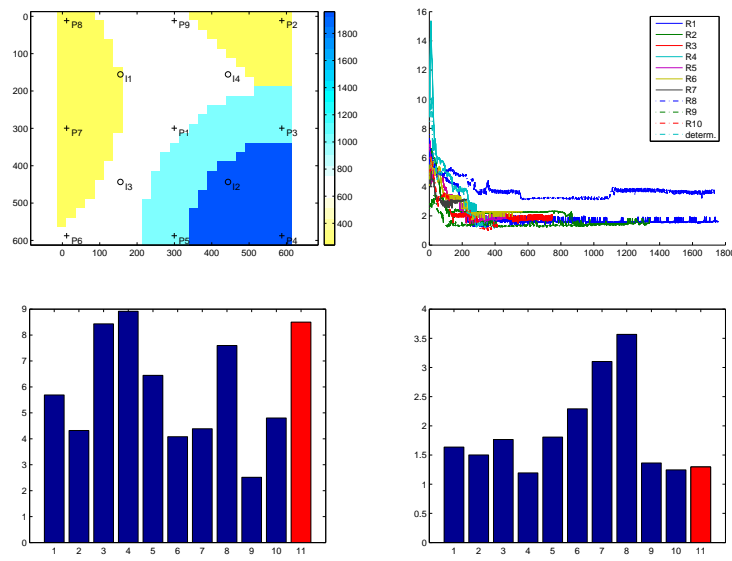


Figura 5.5: Más de dos litofacies. Inicialización geoestadística. Primera fila: Forma real (izquierda); evolución del funcional de coste para las 10 inicializaciones (derecha). Segunda fila: valores de funcional de coste inicial para las 10 inicializaciones(izquierda); valores de funcional de coste final para las 10 reconstrucciones (derecha).

sariamente idénticos al real ó de referencia. Esto es debido a la no unicidad del problema inverso y a la existencia de varios mínimos locales.

5.3. Publicaciones y presentaciones

Publicaciones:

1. (2007) Structural inversion for the history matching problem in reservoir characterization using the Level Set method. R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Inverse Problems (In preparation).

Presentaciones:

1. (2007), June 11-14. Shape based methods for the characterization of reservoirs from production and EM data. (Poster presentation by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) The 69th EAGE conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2007, London, Great Britain
2. (2007), July 16-20 Level set reconstruction from two-phase flow data incorporating statistical techniques (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 07), Zurich, Switzerland

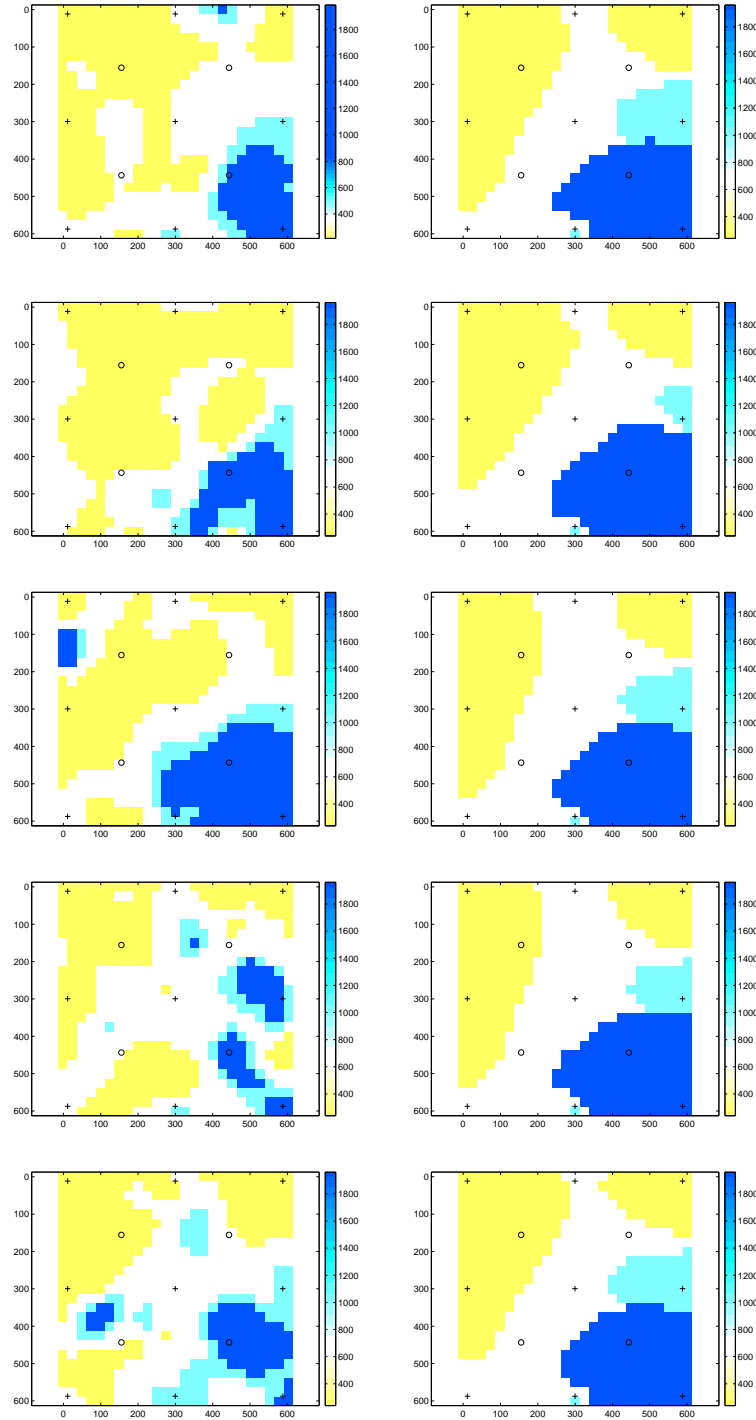


Figura 5.6: Más de dos litofacies. Inicializaciones geoestadísticas 1 hasta 5. Primera Columna: Formas iniciales de las 5 primeras inicializaciones geoestadísticas (desde 1 hasta 5, desde arriba hacia abajo) Segunda fila: Reconstrucción final de cada inicialización (desde 1 hasta 5, desde arriba hacia abajo)

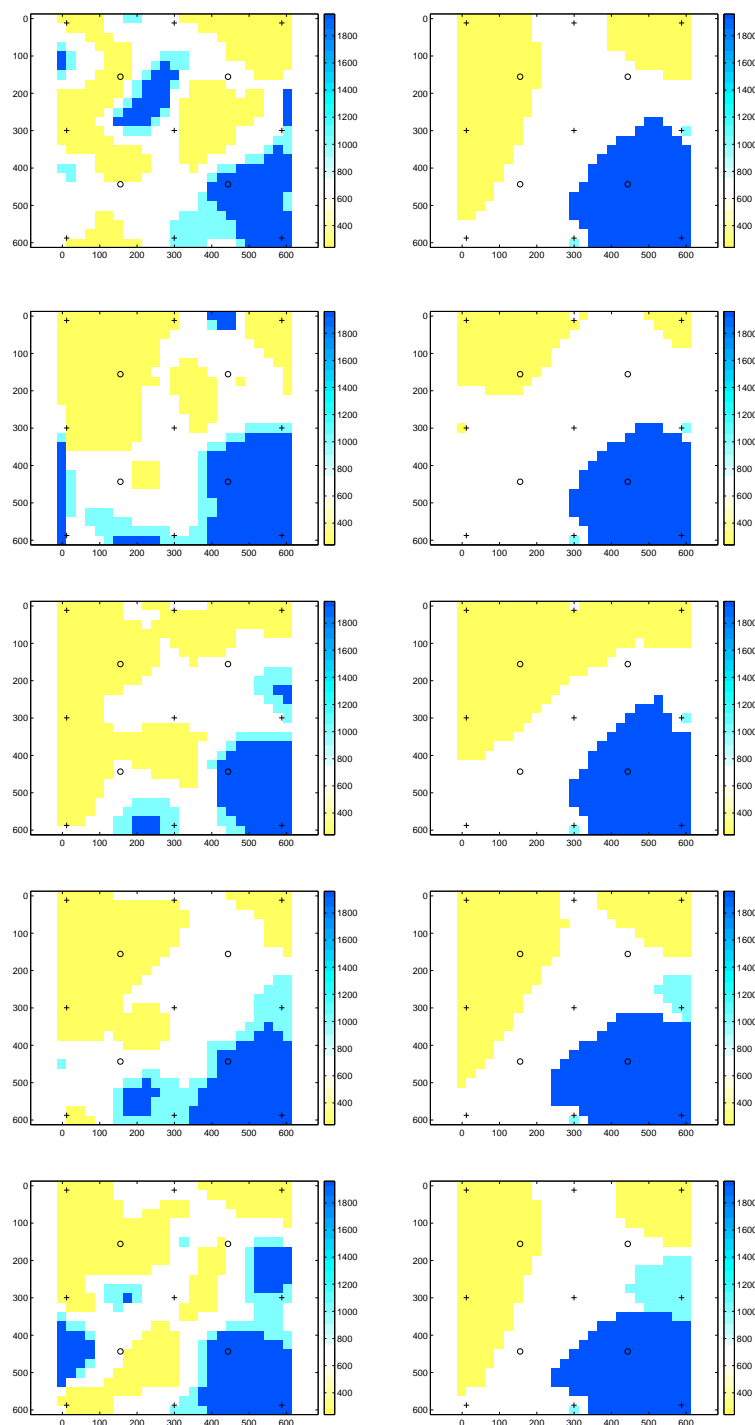


Figura 5.7: Más de dos litofacies. Inicializaciones geoestadísticas 6 hasta 10. Primera Columna: Formas iniciales de las inicializaciones geoestadísticas (desde la 6 hasta la 10, desde arriba hacia abajo) Segunda fila: Reconstrucción final de cada inicialización (desde la 6 hasta la 10, desde arriba hacia abajo)

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se han desarrollado nuevas técnicas para la caracterización de yacimientos que consisten de más de un tipo de roca. En varias aplicaciones reales existe un contraste significativo en los parámetros físicos dentro de las zonas que contienen estos diferentes tipos de roca. Las técnicas clásicas de reconstrucción celda por celda que normalmente se usan en estas aplicaciones no son capaces de resolver las interfaces dentro de diferentes zonas (litofacies). Usan estrategias de regularización que destruyen las fronteras y, en consecuencia, no pueden reconstruir los perfiles de parámetros adecuadamente. Esto genera caracterizaciones de yacimientos que no toman en cuenta la información a priori de la existencia de varios tipos de roca y por esto no pueden representar de manera confiable los reservorios con interfaces en los parámetros petrofísicos (en nuestro caso permeabilidad).

Se ha presentado un nuevo algoritmo de reconstrucción de formas que está basado en la técnica de conjuntos de nivel y del esquema adjunto para calcular direcciones de descenso para un funcional de coste dado. La forma básica de este algoritmo supone que los parámetros dentro de las zonas distintas son constantes y conocidos. Esta técnica básica es de alguna manera similar a técnicas ya desarrolladas en la literatura para aplicaciones diferentes, por ejemplo en la reconstrucción de imágenes en la medicina.

Para ser capaz de afrontar situaciones más realistas en esta tesis también se han desarrollado varias generalizaciones de esta versión básica que están diseñados específicamente para situaciones de la caracterización de yacimientos. Por cierto, también se pueden aplicar a situaciones que surgen en otros campos de la reconstrucción de imágenes.

La primera de estas generalizaciones elimina la suposición de perfiles con-

stantes en cada zona y conocidos. Para empezar, se intenta reconstruir valores promedios de los parámetros en cada zona del yacimiento simultáneamente con las fronteras utilizando los datos de producción. Por supuesto, los parámetros petrofísicos de los yacimientos en aplicaciones realistas nunca son constantes en las zonas individuales. Por eso, estas reconstrucciones con perfiles promedios solo sirven para dar una primera aproximación al perfil real del yacimiento. Para optimizar las reconstrucciones se ha extendido la técnica para reconstruir también perfiles variables en cada zona simultáneamente con las interfaces utilizando los datos de la producción. Además se han desarrollado varias técnicas distintas que son capaces de tomar en cuenta alguna información a priori acerca de los perfiles en cada zona. En particular, se han investigado perfiles suaves que se reconstruyen celda por celda, y perfiles parametrizados (por ejemplo mostrando una tendencia lineal a lo largo de una de las zonas) que se reconstruyen optimizando los parámetros en cada zona. También se han estudiado casos híbridos que combinan estos perfiles de distinta naturaleza en el mismo reservorio.

Una dificultad general que se presenta en la caracterización de yacimientos es que diferentes zonas del yacimiento afectan los datos de la producción con magnitud extremadamente diferente. Para cuantificar este impacto sobre diferentes zonas en los datos de producción se utiliza en este trabajo un perfil de sensibilidad que está directamente asociado al concepto matemático de la derivada de tipo Fréchet del problema directo o, en un dominio discretizado, a la matriz Jacobiana del problema directo discretizado. Se utiliza un esquema adjunto para calcular estos perfiles de sensibilidad que es más eficiente que las técnicas directas usualmente utilizadas en esta aplicación.

El estudio realizado de los perfiles de sensibilidad muestra que los datos de producción afectan los parámetros de zonas distintas del reservorio en magnitud bastante diferente. Zonas con alto flujo de fluidos conectando un inyector con un productor poseen alta sensibilidad con respecto a los parámetros, mientras que la variación de los parámetros en las zonas con bajo flujo no afecta los datos de la producción de manera significativa. En consecuencia las técnicas de reconstrucción basadas en los mapas de sensibilidad (típicamente las técnicas utilizando direcciones de gradiente) tienen problemas reconstruir los perfiles de los parámetros bien en estas zonas de baja sensibilidad.

Con el objetivo de manejar adecuadamente estas zonas de baja sensibilidad y las zonas de alta sensibilidad se han desarrollado varias adaptaciones específicas a nuestras técnicas que permiten reconstruir formas situadas en ambas regiones simultáneamente de manera fiable y estable. Una herramien-

ta importante en estas adaptaciones es la función de bandas (narrowband) y la técnica de introducir nuevos objetos modificando la función de conjuntos de nivel en algunos pasos de la evolución.

La eliminación de la función de bandas durante la evolución permite la creación automática de nuevos objetos en zonas de alta sensibilidad evitando de esta manera algunos mínimos locales. Por otra parte, para reconstruir adecuadamente las zonas de baja sensibilidad, se colocan objetos pequeños (como “semillas”) en esas zonas que ó crecen ó se reducen dependiendo de la dirección del gradiente en estas zonas. Aquí se puede aplicar la función de bandas o no, que produce resultados distintos.

La técnica de introducir objetos nuevos artificiales en el yacimiento durante la evolución también se utiliza en este trabajo para introducir o comprobar algunos tipos de información a priori. En particular, se puede comprobar la existencia de algunas formas geométricas (por ejemplo canales) en el yacimiento modificando la función de conjuntos de nivel de forma que se introduce un canal basado en la información previa.

En muchas aplicaciones reales existen yacimientos que consisten de más de dos tipos de roca. Para reconstruir los perfiles de estos yacimientos se han desarrollado técnicas en este trabajo que son capaces de modelizar estos perfiles utilizando el método de conjuntos de nivel. Se han propuesto varias estrategias en la literatura para modelizar estas situaciones en aplicaciones diferentes. No obstante, estas técnicas no toman en cuenta algunas condiciones particulares asociadas a la aplicación de ingeniería de yacimientos. Por esto se desarrolla aquí una estrategia alternativa para esta aplicación. También se combina esta nueva estrategia con inicializaciones geoestadísticas de la misma manera como se menciona anteriormente en la situación de dos litofacies.

En la generalidad los datos de producción no permiten reconstruir un perfil único de los parámetros que satisface los datos con una tolerancia dada. Eso es debido al mal condicionamiento del problema inverso asociado (ill-posedness) y a los pocos datos de producción. En los métodos de minimización de un funcional de coste usualmente se elige uno de estos perfiles posibles aplicando técnicas de regularización. En aplicaciones reales a menudo es importante tener una idea de la confiabilidad de este perfil reconstruido, y compararlo con varios perfiles alternativos que también satisfacen los datos de producción con la tolerancia dada. Por este motivo se han utilizado estimaciones geoestadísticas, todas igualmente probables tomando en cuenta los datos estáticos del yacimiento, para inicializar la reconstrucción de formas y

perfiles del yacimiento. De esta manera se producen conjuntos de perfiles que todos ajustan los datos de producción pero son distintos ya que evolucionan a partir de inicializaciones distintas. Se han comparado los costes iniciales y los finales para este conjunto de perfiles.

Los ejemplos numéricos presentados en este trabajo demuestran que las técnicas desarrolladas aquí son herramientas poderosas, estables y fiables para la caracterización de yacimientos que consisten de varias litofacies. Los algoritmos desarrollados no están restringidos al uso de los simuladores empleados aquí para generar estos resultados, también se pueden combinar con simuladores comerciales para resolver el problema directo y el adjunto en situaciones de dos y tres dimensiones.

Capítulo 7

Publicaciones y presentaciones

Publicaciones:

1. (2005) Shape reconstruction from two-phase incompressible flow data using level sets, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Proceedings of the International Conference on PDE-Based Image Processing and Related Inverse Problems, CMA, Oslo, August 8–12, 2005, (Eds: X.-C. Tai, K.-A. Lie, T.F. Chan, and S. Osher), pp. 1-19, Series: Mathematics and Visualization, Publisher: Springer, ISBN 078-3-540-33266-4, to appear Dec. 2006
2. (2006) Shape reconstruction and structural inversion for medical, geophysical and industrial tomography, O. Dorn and R. Villegas, Proc. Oberwolfach workshop on 'Mathematical Methods in Tomography' (org. A. Louis, F. Natterer and E. T. Quinto), Report No. 34/2006, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, pp 50-52.
3. (2006) Simultaneous characterization of geological regions and parameterized internal permeability profiles in history matching, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Proc. 10th European conference on the mathematics of oil recovery ECMOR X, 4-7 Sept., Amsterdam, Netherlands, Proc. paper A015, (pp 1-9).
4. (2006) Simultaneous characterization of geological shapes and permeability distributions in reservoirs using the level set method, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan, F. Mustieles, Society of Petroleum Engineers SPE paper 100291, SPE Europec/EAGE Annual Conference

and Exhibition, Vienna, Austria, June 12-15, 2006 (Proc. paper C015, pp 1-12).

5. (2006) Sensitivity studies for shape reconstruction in reservoir characterization using level sets, R. Villegas, M. Kindelan, O. Dorn, M. Moscoso, Proceedings "Inverse problems: modelling and simulation", Fethiye, Turkey, May 29-June 02, 2006, (pp1-4).
6. (2007) Imaging low sensitivity regions in petroleum reservoirs using topological perturbations and level sets, R. Villegas, O. Dorn, M. Kindelan and M. Moscoso, Journal of Inverse and Ill-posed Problems.
7. (2007) Characterization of reservoirs by evolving level set functions obtained from geostatistics, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Proc. 14th European Conference on Mathematics for Industry (ECMI 2006), 10-14 July 2006, Leganes, Spain. Publisher: Springer
8. (2007) Structural stochastic inversion for the history matching problem in reservoir characterization using the Level Set method. R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, Inverse Problems (In preparation).

Presentaciones:

1. (2005) August 8-12, Shape reconstruction from two-phase incompressible flow data using level sets, (with R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan, presented by O. Dorn), International conference on 'PDE-based image processing and related inverse problems, CMA, Oslo, Norway.
2. (2005) December 10-13, Geological shape characterization for reservoirs using a level set method on production data, (with R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan, F. J. Mustieles, presented by O. Dorn) SPE/EAGE Reservoir Characterization and Simulation Symposium Overcoming Today's Challenges in Field Development, Dubai, U.A.E.
3. (2006), May 24 Simultaneous reconstruction and segmentation of images from two-phase fluid flow data using a level set technique (by R. Villegas and O. Dorn) Poster presentation at the workshop 'Visual Learning and Recognition at the Institute for Mathematics and its Applications (IMA), Minneapolis, USA, May 22-26, 2006.

4. (2006), May 15 A new level set technique for the simultaneous imaging of shapes and material properties from two-phase flow data (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas), session 'Computational and Modeling Approaches to Inverse Problems, SIAM conference on Imaging Science, Minneapolis, May 15-17, 2006.
5. (2006) May 29 - June 2 Shape reconstruction in reservoir characterization from two-phase flow data using level sets, (with M. Kindelan, R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, presented by M. Kindelan), 3rd International Conference 'Inverse Problems: Modeling and Simulation', Fethiye, Turkey, Special session on 'Level set methods for inverse problems'(org. H. Ben Ameer).
6. (2006), June 12-15 Simultaneous characterization of geological shapes and permeability distributions in reservoirs using the level set method, (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso, M. Kindelan and F. J. Mustieles, presented by R. Villegas), SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition, Vienna, Austria.
7. (2006), July 10-14 Characterization of reservoir lithofacies in low sensitivity zones (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) European Conference on Mathematics for Industry ECMI 2006, Leganes-Madrid, Spain.
8. (2006), July 30 - August 7, Shape reconstruction and structural inversion for medical, geophysical and industrial tomography (by O. Dorn and R. Villegas, presented by O. Dorn) 'Mathematical methods in tomography'workshop at Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Germany.
9. (2006), Sept 5 Simultaneous characterization of geological regions and parameterized internal permeability profiles in history matching, (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by O. Dorn) 10th European conference on the mathematics of oil recovery ECMOR X, 4-7 Sept., Amsterdam, Netherlands.
10. (2006), Dec 13-15 Level Set techniques for geological shape reconstruction in reservoir characterization (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) 'Inverse Days 2006', Tampere, Finland.

11. (2007), June 25-29 A generalized level set technique for the simultaneous reconstruction of geological regions and region-specific model-based internal permeability profiles of petroleum reservoirs from production data. Conference on Applied Inverse Problems (AIP 2007): Theoretical and Computational Aspects, Vancouver, Canada.
12. (2007), July 16-20 Shape-based techniques for an inverse two-phase flow problem in reservoir characterization (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 07), Zurich, Switzerland
13. (2007), June 11-14. Shape based methods for the characterization of reservoirs from production and EM data. (Poster presentation by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) The 69th EAGE conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2007, London, Great Britain
14. (2007), July 16-20 Level set reconstruction from two-phase flow data incorporating statistical techniques (by R. Villegas, O. Dorn, M. Moscoso and M. Kindelan, presented by R. Villegas) 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 07), Zurich, Switzerland

Capítulo 8

APÉNDICES

APÉNDICE 1. Métodos de Simulación

APÉNDICE 1.1. Método IMPES

Sumando las ecuaciones de conservación del agua y las del petróleo (1.22) y (1.23) del modelo simplificado expuesto en la sección 1.2, y utilizando las relaciones $S_o = 1 - S_w$ y $p_o = p_w + p_{cwo}$ se obtiene:

$$-\nabla \cdot [T(\nabla p_w + \rho g \vec{k})] - \nabla \cdot [T_o \nabla p_{cwo}] = Q, \quad (8.1)$$

$$\nabla \cdot [T_w(\nabla p_w + \rho_w g \vec{k})] + Q_w = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Es decir, una ecuación para la presión (8.1) que unida a la ecuación de conservación del agua (8.2) forman el sistema que se resuelve al utilizar el método *IMPES*. La densidad ρ se define mediante $T = T_w + T_o$ y $\rho = (T_o \rho_o + T_w \rho_w)/T$.

La constante c de las ecuaciones (1.27)- (1.28) se toma:

$$c = \frac{2\pi dz}{dx dy \ln(\frac{r_d}{r_w})}$$

donde $r_d = 0,28 \frac{[dx^2 + dy^2]^{\frac{1}{2}}}{2}$ es el radio de drenaje o zona del yacimiento que se ve afectada por la producción y r_w es el radio del pozo. Los valores de p_{wb} se fijan y a partir de ahí se calcula el valor de los términos fuente.

La idea es calcular la presión, incógnita en el termino fuente, mientras que en la ecuación de la saturación esta ya se considera conocida, por lo que se tiene explícitamente el valor del termino fuente.

La ecuación (8.1) es elíptica no lineal, y, aunque no aparece explícitamente, depende de la saturación a través de las transmisibilidades, la presión capilar y los términos fuente. Una vez resuelta esta, la ecuación (8.2) se utiliza para calcular la distribución de la saturación en un tiempo nuevo.

Además son necesarias unas condiciones iniciales y de contorno. Como condiciones iniciales se suponen conocidas las distribuciones iniciales de presión y de saturación de agua:

$$S_w(\vec{x}, 0) = S_w^0(\vec{x}) \quad (8.3)$$

$$p_w(\vec{x}, 0) = p_w^0(\vec{x}) \quad (8.4)$$

ya que las del petróleo se calcularían a partir de estas por las ecuaciones constitutivas (8.1) y (8.2).

La ecuación (8.1), se resuelve numéricamente usando diferencias finitas, pero siempre usando la transmisibilidad “upwind” es decir la de la celda de la que proviene el flujo. De no ser así el método es inestable. En dos dimensiones (sección vertical) la discretización mediante diferencias finitas upwind tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j}^{x+}(p_{w_{i+1,j}}^{n+1} - p_{w_{i,j}}^{n+1}) - T_{i,j}^{x-}(p_{w_{i,j}}^{n+1} - p_{w_{i-1,j}}^{n+1})}{2\Delta x^2} \\ & + \frac{T_{i,j}^{z+}(p_{w_{i,j+1}}^{n+1} - p_{w_{i,j}}^{n+1}) - T_{i,j}^{z-}(p_{w_{i,j}}^{n+1} - p_{w_{i,j-1}}^{n+1})}{2\Delta z^2} = \\ & - \frac{T_{o_{i,j}}^{x+}(p_{cwo_{i+1,j}}^n - p_{cwo_{i,j}}^n) - T_{o_{i,j}}^{x-}(p_{cwo_{i,j}}^n - p_{cwo_{i-1,j}}^n)}{2\Delta x^2} \\ & - \frac{T_{o_{i,j}}^{z+}(p_{cwo_{i,j+1}}^n - p_{cwo_{i,j}}^n) - T_{o_{i,j}}^{z-}(p_{cwo_{i,j}}^n - p_{cwo_{i,j-1}}^n)}{2\Delta z^2} \\ & - g \left(\frac{T_{w_{i,j+1}}^n \rho_{w_{i,j+1}}^n - T_{w_{i,j-1}}^n \rho_{w_{i,j-1}}^n}{2\Delta z} + \frac{T_{o_{i,j+1}}^n \rho_{o_{i,j+1}}^n - T_{o_{i,j-1}}^n \rho_{o_{i,j-1}}^n}{2\Delta z} \right) - Q_{i,j} \end{aligned}$$

donde

$$T_{i,j}^{x+} = a_1 T_{i,j}^n + (2 - a_1) T_{i+1,j}^n \quad (8.5)$$

$$T_{i,j}^{x-} = a_2 T_{i,j}^n + (2 - a_2) T_{i-1,j}^n \quad (8.6)$$

$$T_{i,j}^{z+} = a_3 T_{i,j}^n + (2 - a_3) T_{i,j+1}^n \quad (8.7)$$

$$T_{i,j}^{z-} = a_4 T_{i,j}^n + (2 - a_4) T_{i,j-1}^n \quad (8.8)$$

son las transmisibilidades totales “upwind” y $T_{o_{i,j}}^{x+}$, $T_{o_{i,j}}^{x-}$, $T_{o_{i,j}}^{z+}$, $T_{o_{i,j}}^{z-}$ son las transmisibilidades del petróleo “upwind” definidas de forma equivalente. En la definición, a_1 , a_2 , a_3 y a_4 son los términos que nos van a servir para tomar la transmisibilidad “upwind”. Valen 2 cuando el flujo va de la celda i, j a la correspondiente celda de las de alrededor, o 0 si el flujo viene de fuera. Supuestas conocidas las transmisibilidades, esta discretización reduce el cálculo de la presión p_w a resolver un sistema lineal disperso. En el caso de dominios rectangulares, la matriz tiene estructura tridiagonal a bloques en 2D, o pentadiagonal a bloques en 3D.

Una vez calculada la presión del agua, la saturación se calcula resolviendo la ecuación de conservación (8.2), discretizada con diferencias progresivas en el tiempo y centradas en el espacio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi \frac{S_{w_{i,j}}^{n+1} - S_{w_{i,j}}^n}{\Delta t} = & \frac{T_{w_{i,j}}^{x+} (p_{w_{i+1,j}}^{n+1} - p_{w_{i,j}}^{n+1}) - T_{w_{i,j}}^{x-} (p_{w_{i,j}}^{n+1} - p_{w_{i-1,j}}^{n+1})}{2\Delta x^2} \\ & + \frac{T_{w_{i,j}}^{z+} (p_{w_{i,j+1}}^{n+1} - p_{w_{i,j}}^{n+1}) - T_{w_{i,j}}^{z-} (p_{w_{i,j}}^{n+1} - p_{w_{i,j-1}}^{n+1})}{2\Delta z^2} \\ & + g \left(\frac{T_{w_{i,j+1}}^n \rho_{w_{i,j+1}}^n - T_{w_{i,j-1}}^n \rho_{w_{i,j-1}}^n}{2\Delta z} \right) + Q_{w_{i,j}} \end{aligned}$$

donde $T_{w_{i,j}}^{x+}$, $T_{w_{i,j}}^{x-}$, $T_{w_{i,j}}^{z+}$, $T_{w_{i,j}}^{z-}$ son las transmisibilidades del agua “upwind” definidas de forma equivalente a las totales y las del petróleo.

También es importante tener en cuenta que se trata de una ecuación no lineal en la saturación, ya que las transmisibilidades también dependen de la saturación de forma no lineal. En este caso dichas transmisibilidades se linealizan calculándolas con los valores de la saturación en el paso de tiempo anterior.

La presión y la saturación se calculan de forma alternativa actualizando en cada paso los coeficientes.

APÉNDICE 1.2. Método de líneas de corriente

En el método de líneas de corriente se introduce una nueva variable, el tiempo de vuelo, “time of flight”, que se define como el tiempo que tarda una partícula en viajar desde el comienzo de una línea de corriente, hasta cualquier punto de la misma. A partir de la ecuación de conservación del agua del modelo simplificado se obtiene la ecuación de la saturación sobre las líneas de corriente de la siguiente manera:

Sumando las ecuaciones (1.17) y (1.18) y usando las ecuaciones (1.19) y (1.20) se obtiene:

$$-\nabla \cdot [T(\nabla p_w + \rho g \vec{k})] - \nabla \cdot [T_o \nabla p_{cwo}] = Q \quad (8.9)$$

donde $\rho = \frac{T_w \rho_w + T_o \rho_o}{T_w + T_o}$ y $T = T_w + T_o$. Esta igualdad será útil mas adelante. La velocidad total del fluido se define como:

$$u_t = -T(\nabla p_w + \rho g \vec{k}) - T_o \nabla p_{cwo}. \quad (8.10)$$

El tiempo de vuelo se define como:

$$\tau = \int_0^s \frac{\phi}{|\vec{u}_t|} d\sigma. \quad (8.11)$$

Debido a que el tiempo de vuelo representa el tiempo que tarda una partícula en recorrer una línea de corriente desde su inicio hasta una longitud de arco s . Derivando se obtiene:

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{\phi}{|\vec{u}_t|} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\phi}{|\vec{u}_t|} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (8.12)$$

Además, el cambio de una variable a lo largo de una línea de corriente se obtiene multiplicando el gradiente de dicha variable por un vector unitario en la dirección de dicha línea, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\vec{u}_t}{|\vec{u}_t|} \cdot \nabla \Rightarrow |\vec{u}_t| \frac{\partial}{\partial s} = \vec{u}_t \cdot \nabla. \quad (8.13)$$

Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$|\vec{u}_t| \frac{\partial}{\partial s} = \phi \frac{\partial}{\partial \tau} = \vec{u}_t \cdot \nabla. \quad (8.14)$$

Por tanto es necesario modificar la ley de conservación del agua (8.2) hasta obtener un término que contenga $\vec{u}_t \cdot \nabla$ para poder introducir el tiempo de vuelo por medio de la igualdad (8.14).

Partiendo de (1.17):

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \nabla \cdot [T_w(\nabla p_w + \rho_w g \vec{k})] + Q_w$$

que se modifica para introducir ρ

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \nabla \cdot [T_w(\nabla p_w + \rho g \vec{k})] - \nabla \cdot [T_w(\rho - \rho_w) g \vec{k}] + Q_w.$$

Utilizando la expresión de la derivada de un producto se obtiene

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \nabla T_w \cdot (\nabla p_w + \rho g \vec{k}) + T_w \nabla \cdot [\nabla p_w + \rho g \vec{k}] - \nabla \cdot [T_w(\rho - \rho_w) g \vec{k}] + Q_w.$$

Para conseguir tener la velocidad total en la ecuación, es necesario introducir el término $\frac{1}{T}$, para lo cual se multiplica y divide el primer término por T . Seguidamente se introduce la fracción $\frac{1}{T}$ dentro de ∇T_w llegando a:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} &= T_w \nabla \cdot [\nabla p_w + \rho g \vec{k}] - \nabla \left(\frac{T_w}{T} \right) \cdot (-T(\nabla p_w + \rho g \vec{k})) + \\ &\quad \frac{T_w}{T} \nabla T \cdot (\nabla p_w + \rho g \vec{k}) - \nabla \cdot [T_w(\rho - \rho_w) g \vec{k}] + Q_w. \end{aligned}$$

Agrupando y reordenando términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} &= \frac{T_w}{T} \nabla \cdot [T(\nabla p_w + \rho g \vec{k})] - \nabla \left(\frac{T_w}{T} \right) \cdot (-T(\nabla p_w + \rho g \vec{k})) - \\ &\quad \nabla \cdot [T_w(\rho - \rho_w) g \vec{k}] + Q_w. \end{aligned}$$

Usando ahora la ecuación (8.9) y reordenando términos convenientemente se obtiene:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\frac{T_w T_o}{T} \nabla p_{cwo} \right] - \nabla \left(\frac{T_w}{T} \right) \cdot u_t - \nabla \cdot [T_w(\rho - \rho_w) g \vec{k}] + Q_w - \frac{T_w}{T} Q.$$

Finalmente agrupando los términos de manera adecuada se obtiene

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{u}_t \cdot \nabla \left(\frac{T_w}{T} \right) + \nabla \cdot \vec{G}_w = Q_w - \frac{T_w}{T} Q \quad (8.15)$$

donde $\vec{G}_w = \frac{T_o T_w}{T} (\nabla p_{cwo} + (\rho_o - \rho_w) g \vec{k})$ es el término que considera los efectos capilares y gravitatorios.

Ahora ya se puede usar la igualdad (8.14) para obtener:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{T_w}{T})}{\partial \tau} + \frac{1}{\phi} \nabla \cdot \vec{G}_w = \frac{1}{\phi} (Q_w - \frac{T_w}{T} Q). \quad (8.16)$$

Por tanto hay que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot [T(\nabla p_w + \rho g \vec{k})] - \nabla \cdot [T_o \nabla p_{cwo}] &= Q \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{T_w}{T})}{\partial \tau} + \frac{1}{\phi} \nabla \cdot \vec{G}_w &= \frac{1}{\phi} (Q_w - \frac{T_w}{T} Q) \quad \text{en cada línea de corriente} \end{aligned}$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S_w(\tau, 0) &= S_w^0(\tau(\vec{x})) && \text{en cada línea de corriente} \\ p_w(\vec{x}, 0) &= p_w^0(\vec{x}) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

y condiciones de contorno que para la ecuación de la presión pueden ser de tipo Neumann, de tipo Dirichlet o bien de flujo cero a través de la frontera, como ya se explicó en la sección del método *IMPES*. En la ecuación de la saturación no son necesarias condiciones de contorno.

Aquí se presenta la ecuación hiperbólica sobre las líneas de corriente:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f(S_w)}{\partial \tau} = 0, \quad (\tau, t) \in \mathfrak{R} \times (0, T)$$

$$S_w(\tau, 0) = u^0(\tau), \quad \tau \in \mathfrak{R}$$

donde $f_w = \frac{T_w}{T}$ es el flujo fraccional. Para ello lo primero que se hace es fijar unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas. En este caso, las condiciones iniciales son simplemente poner en cada nodo la saturación que le corresponde según la celda a la que pertenezca, lo cual no tiene ninguna complicación. Las condiciones de contorno en cada línea son también sencillas. En nuestra implementación las líneas de corriente llegan solamente a las paredes de las celdas donde hay un pozo. Esto supone que en $\tau = 0$ hay que poner la saturación que se haya calculado para la celda del pozo de inyección a partir de la ecuación del término fuente, la cual también sirve para calcular

la saturación en las celdas de los pozos de extracción, puesto que allí tampoco llegan las líneas de corriente.

En el caso de la ecuación hiperbólica sobre las líneas de corriente se han utilizado dos métodos distintos para la resolución de esta ecuación. El primero, el método upwind, es un método de diferencias finitas en el que se hacen diferencias progresivas en el tiempo y progresivas (regresivas) en el espacio según la dirección del flujo. De esta forma la discretización de la ecuación queda como sigue:

$$\frac{S_w^{n+1} - S_w^n}{\Delta t} + \frac{f_w(S_w^n)_i - f_w(S_w^n)_{i-1}}{\Delta \tau} = 0. \quad (8.17)$$

Como desventajas hay que decir que el paso temporal está limitado por una condición CFL (Courant-Friedrichs-Levy) lo cual impide en ciertos casos tomar pasos de tiempo todo lo grandes que sería de desear. Además, la difusión numérica, a pesar de evitar las oscilaciones, también es una fuente de error. El cálculo de la condición CFL se hace por medio del análisis de Fourier de la discretización, como se explica a continuación.

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial \tau} = 0$$

que se linealiza usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial \tau} = 0$$

para poder usar análisis de Fourier. El término $A = \frac{\partial f_w}{\partial S_w}$ es siempre mayor que cero. Esta ecuación se discretiza usando diferencias finitas upwind, quedando:

$$\frac{S_{w,j}^{n+1} - S_{w,j}^n}{\Delta t} = -A \frac{S_{w,j}^n - S_{w,j-1}^n}{\Delta \tau}.$$

Una vez discretizada la ecuación, se sustituye $S_{w,j}^n$ por $\xi^n e^{ijk\Delta\tau}$:

$$\frac{\xi^{n+1} e^{ijk\Delta\tau} - \xi^n e^{ijk\Delta\tau}}{\Delta t} = -A \frac{\xi^n e^{ijk\Delta\tau} - \xi^n e^{i(j-1)k\Delta\tau}}{\Delta \tau}.$$

Simplificando queda:

$$\frac{\xi - 1}{\Delta t} = -A \frac{1 - e^{-ik\Delta\tau}}{\Delta \tau},$$

ó lo que es lo mismo:

$$\xi = 1 - \frac{A\Delta t}{\Delta\tau}(1 - e^{-ik\Delta\tau}).$$

Para que el método sea estable es necesario que se cumpla $0 < |\xi| \leq 1$. El módulo de ξ es:

$$|\xi| = \left| 1 - \frac{A\Delta t}{\Delta\tau}(1 - e^{-ik\Delta\tau}) \right|.$$

Por tanto es necesario que se cumpla:

$$2 > \left| \frac{A\Delta t}{\Delta\tau}(1 - e^{-ik\Delta\tau}) \right| \geq 0.$$

De aquí que:

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta\tau}{A(1 - e^{-ik\Delta\tau})}.$$

Por tanto, considerando el peor de los casos posibles, se obtiene como condición de tiempo

$$\Delta t \leq \frac{\min\{\Delta\tau\}}{\max\left\{\frac{\partial f_w}{\partial S_w}\right\}}.$$

Con esto llegamos a:

$$\frac{S_w^{n+1} - S_w^n}{\Delta t} + \frac{(f_w)_i - (f_w)_{i-1}}{\Delta\tau} = 0 \quad (8.18)$$

Una vez calculada la saturación sobre la malla regular, hay que volver a pasar a la original, para poder calcular la saturación sobre las celdas usadas al resolver la ecuación de la presión, y el resto de las ecuaciones que contienen términos difusivos, con diferencias finitas.

En general la aplicación de la técnica de líneas de corrientes se presenta en el siguiente algoritmo:

1. Se calcula la presión resolviendo la ecuación elíptica correspondiente (8.9). Usando diferencias finitas se obtienen los valores de la presión en los centros de las celdas.
2. Se calculan las velocidades en las caras de las celdas usando la ley de Darcy.

3. Se calculan las líneas de corriente y los tiempos de vuelo.
4. Se resuelve la parte de los términos fuente correspondiente a los pozos de inyección en la ecuación de la saturación.
5. Se resuelve la parte convectiva de la ecuación de la saturación sobre las líneas de corriente.
6. Se proyecta la saturación calculada sobre las líneas de corriente en la malla de diferencias finitas. Este paso es importante, ya que es donde se produce mayor difusión numérica.
7. Se resuelve la parte difusiva de la ecuación usando diferencias finitas, tomando como dato inicial los valores obtenidos en el paso anterior.
8. Se resuelve la parte de los términos fuente correspondiente a los pozos de producción en la ecuación de la saturación.
9. Se vuelve al paso 1.

APÉNDICE 1.3. Método implícito

Primero, se van a definir los potenciales $\Phi_l = p_l + \rho_l g z$ para $l = w, o$. De esta forma las ecuaciones (8.1) y (8.2) quedan:

$$\nabla \cdot [T_w \nabla \Phi_w] + Q_w = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad \text{en } \Omega \quad (8.19)$$

$$\nabla \cdot [T_o \nabla \Phi_o] + Q_o = \phi \frac{\partial S_o}{\partial t} \quad \text{en } \Omega \quad (8.20)$$

Usando que $p_{cwo}(S_w) = \Phi_o - \Phi_w + \Delta \rho g z$ y que $\frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\partial S_w}{\partial p_{cwo}} \frac{\partial p_{cwo}}{\partial t}$ las ecuaciones anteriores se pueden reescribir como:

$$\nabla \cdot [T_o \nabla \Phi_o] + Q_o = -\phi \frac{\partial S_w}{\partial p_{cwo}} \left(\frac{\partial \Phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right) \quad \text{en } \Omega. \quad (8.21)$$

$$\nabla \cdot [T_w \nabla \Phi_w] + Q_w = \phi \frac{\partial S_w}{\partial p_{cwo}} \left(\frac{\partial \Phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right) \quad \text{en } \Omega. \quad (8.22)$$

Así, se discretiza la ecuación usando un esquema implícito de diferencias finitas, en el que las incógnitas van a ser los potenciales. Una vez se han hallado

los potenciales se pueden obtener las saturaciones a partir de la función de la presión capilar. Finalmente se recalculan todos los coeficientes, y se vuelve a empezar.

El método implícito se puede resumir en el siguiente algoritmo:

1. Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (8.21) y (8.22).
2. Se calcula la presión capilar por medio de $p_{cwo}(S_w) = \Phi_o - \Phi_w + \Delta\rho g z$.
3. Se calculan las saturaciones a partir de las curvas de presión capilar.
4. Se calculan los coeficientes de las ecuaciones, y se vuelve al paso 1.

APÉNDICE 2. La técnica del operador adjunto para calcular sensibilidades.

En esta sección se muestra como aplicar el operador adjunto linealizado $\mathcal{R}'(K)^*$ a un vector arbitrario ρ en el espacio de los datos Z (datos de presión y producción) en una forma eficiente. Esto conduce al llamado esquema adjunto para calcular sensibilidades. En trabajos anteriores se presenta la aplicación del esquema adjunto en la caracterización de yacimientos [30, 60].

Cálculo del funcional de coste o Residuo

La norma del residuo o funcional de coste de nuestro problema será el funcional a minimizar en las reconstrucciones. Este funcional está relacionado con la diferencia entre la solución del modelo directo y los datos de producción disponibles para el yacimiento.

Las ecuaciones (1.22)-(1.28) pueden ser escritas en función de operadores como:

$$\Lambda(K)u = \mathbf{q} \quad (8.23)$$

con $u = (p, S_w)$ y donde el lado derecho \mathbf{q} representa los términos al lado derecho de las ecuaciones (1.22), (1.23). En esta parte se define el operador directo \mathcal{A} que mapea el parámetro permeabilidad K a los datos de producción correspondiente $g = Mu$ como:

$$\mathcal{A}(K) = Mu = M\Lambda(K)^{-1}\mathbf{q} \quad (8.24)$$

donde M es el operador de las medidas hechas en los pozos de producción. En este caso es la tasa de flujo de agua y está dado por

$$Mu = \{Q_{w,j}^{(p)}\}_{j=1 \dots, N_p}. \quad (8.25)$$

En la práctica y para nuestra aplicación el término $\Lambda(K)^{-1}\mathbf{q}$ implica correr una simulación del modelo directo con los valores de presión y con el mapa de permeabilidad K dado, es decir, será el resultado del simulador. Adicionalmente en este tipo de aplicaciones de ajuste histórico disponemos de datos reales tomados en mediciones de campo o datos sintéticos generados de alguna manera, representados por

$$\tilde{g} = M\tilde{u}. \quad (8.26)$$

Finalmente, introducimos el operador residuo \mathcal{R} como la diferencia entre los datos generados por el simulador y los datos reales

$$\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K) - \tilde{g}. \quad (8.27)$$

Cálculo del operador $\mathcal{R}'(K)$. El problema linealizado.

Si se considera una pequeña perturbación δK en la distribución de permeabilidad K que conduce a pequeña perturbación W y q en la saturación y la presión. Aquí se asume que la presión permanece aproximadamente constante, tal que ∇q es despreciable, debido a que en el yacimiento se inyecta suficiente agua para mantener la presión. Usando un enfoque heurístico para derivar una expresión para \mathcal{R}' , se introduce $K + \delta K$ y $S_w + W$ en (1.23), donde se desprecian los términos de segundo orden. Entonces, W resuelve el problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial W}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\frac{\partial T_w}{\partial S_w} W \nabla p \right] - \frac{\partial Q_w}{\partial S_w} W &= \frac{\delta K}{K} Q_w + \nabla \cdot \left[\frac{\delta K}{K} T_w \nabla p \right] \quad \text{en } \Omega \\ W(\vec{x}, 0) &= 0 \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (8.28)$$

donde S_w y p son las soluciones de (1.22)-(1.26). A partir del valor de W se deriva la expresión linealizada de los datos a una perturbación δK en la distribución permeabilidad, la cual viene dada por:

$$\mathcal{R}'(K)\delta K = \frac{\partial Q_w}{\partial S_w} W \Big|_{\Omega_+ \times [0, t_f]}. \quad (8.29)$$

Aquí, Ω_+ denota el conjunto de los pozos productores donde se obtienen los datos.

Cálculo del operador $\mathcal{R}'(K)^*$. El problema adjunto.

Aquí, se deriva una expresión para el operador adjunto $\mathcal{R}'(K)^*$ aplicado a una función ρ en el espacio de los datos. El operador $\mathcal{R}'(K)^*$ es definido por

$$\langle \mathcal{R}'(K)\delta K, \rho \rangle_Z = \langle \delta K, \mathcal{R}'(K)^*\rho \rangle_P, \quad (8.30)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ indica el producto interno en el espacio de los parámetros P , y $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$ representa el producto interno en el espacio de los datos Z . Así se definen los productos internos

$$\langle f, g \rangle_Z = \sum_{j=1}^{N_p} \int_0^{t_f} f_j g_j dt; \quad \langle A, B \rangle_P = \int_{\Omega} A B d\vec{x}. \quad (8.31)$$

$f_j = f(\vec{x}_{p_j}, t)$ y $g_j = g(\vec{x}_{p_j}, t)$, $j = 1, \dots, N_p$, son funciones dependientes del tiempo definidas en las posiciones de los pozos de producción \vec{x}_{p_j} . La siguiente *forma adjunta del operador residuo linealizado* ha sido derivada en [60]:

Sea $\rho \in D$ una función arbitraria en el espacio de los datos. Entonces $\mathcal{R}'(K)^*\rho$ es dado por

$$\mathcal{R}'(K)^*\rho = \int_0^{t_f} \left(\frac{T_w}{K} \nabla p \nabla z - z \frac{1}{K} Q_w \right) dt \quad (8.32)$$

donde z es la solución de la ecuación adjunta

$$-\phi \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial T_w}{\partial S_w} \nabla p \nabla z - \left(z - \sum_{j=1}^{N_p} \rho \delta(\vec{x} - \vec{x}_j^{(p)}) \right) \frac{\partial Q_w}{\partial S_w} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8.33)$$

$$z(\vec{x}, t_f) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (8.34)$$

y S_w y p son las soluciones de (1.22)-(1.26).

APÉNDICE 3. Método de Conjuntos de Nivel

APÉNDICE 3.1. Variación del coste debido al campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x})$

Supongamos que queremos evolucionar una frontera $\Gamma = \partial D$ numéricamente para reducir un funcional de coste dado que depende de Γ de alguna manera. El enfoque aquí será en el funcional de coste tipo mínimos cuadrados en los datos.

Un método popular para generar pequeños desplazamientos $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ para mover las fronteras ∂D es asignar a cada punto del dominio un *campo de velocidad* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ y moviendo los puntos $\mathbf{x} \in \Omega$ con una pequeña evolución artificial en tiempo $[0, \tau]$ con velocidad constante $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Entonces se tiene

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\tau. \quad (8.35)$$

Introduciendo esta ecuación en (1.39) se obtiene para $t \in [0, \tau]$ el cambio correspondiente en los parámetros

$$\delta K(\mathbf{x}; t) = (K_i - K_e) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) t \delta_{\partial D}(\mathbf{x}). \quad (8.36)$$

Uniendo las expresiones (8.36) y (1.33) y despreciando los términos de orden mayor al lineal, se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(K(t)) - \mathcal{J}(K(0)) &= \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \delta K(\mathbf{x}; t) \right\rangle_P \\ &= \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), (K_i - K_e) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) t \delta_{\partial D}(\mathbf{x}) \right\rangle_P \end{aligned} \quad (8.37)$$

ó, en el límite $t \rightarrow 0$, evaluando la distribución delta de Dirac, se obtiene

$$\left. \frac{\partial \mathcal{J}(K)}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{\partial D} \left[\mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \right] (K_i - K_e) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}). \quad (8.38)$$

Una vez encontrada la dirección de descenso para encontrar un campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que $\left. \frac{\partial \mathcal{J}(K)}{\partial t} \right|_{t=0} < 0$, se puede esperar (por razones de continuidad) que esta desigualdad se extiende a un intervalo de tiempo suficientemente pequeño $[0, \tau]$ y que por consiguiente el coste total durante el flujo artificial es reducido durante el tiempo $[0, \tau]$. Esta es la estrategia

general de la mayoría de los estudios de optimización para la resolución de problemas inversos.

Observa que solo el componente normal del campo de la velocidad

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (8.39)$$

en la frontera ∂D de la forma D es de relevancia para la variación del coste. Esto es debido a que los componentes tangenciales no contribuyen a la deformación de formas.

APÉNDICE 3.2. Reducción del coste usando el método de conjunto de nivel

Hasta el momento se han descrito técnicas para reducir el funcional de coste en un proceso de reconstrucción de formas. En la literatura se han presentado técnicas de solución alternativas por ejemplo técnicas de reconstrucción algebraicas (ART no lineal) que se describen en [39, 41, 43, 44, 100, 101].

Esta sección presenta una variación del método del gradiente ó el método de búsqueda de la dirección de máximo descenso para reconstruir formas usando conjuntos de nivel.

Si se asume que la forma D es representada por una *función de conjunto de nivel continuamente diferenciable* ϕ con $|\nabla\phi| \neq 0$ en la frontera de las formas, se plantea deformarlas numéricamente según una dirección de flujo $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, por ejemplo moviéndolas siguiendo de una dirección de descenso que minimiza el funcional de coste. Varias formas geométricas relacionadas a la frontera ∂D pueden ser expresadas en términos de la función de conjunto de nivel ϕ . Por ejemplo, se presenta la expresión para la dirección normal a las formas como:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}. \quad (8.40)$$

Además, la curvatura local $\kappa(\mathbf{x})$ de ∂D , que es la divergencia del campo normal $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, tiene la forma

$$\kappa(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right). \quad (8.41)$$

El lado derecho de (8.40) y (8.41) tiene sentido en cada punto del dominio Ω donde la función conjunto de nivel ψ es suficientemente suave, permitiendo

extender estos valores desde la fronteras ∂D hasta las celdas vecinas. Si se asume que el campo de velocidades es suficientemente suave entonces un punto de la frontera \mathbf{x} permanece en la frontera de $\partial D(t)$ durante la evolución de las formas. Aquí se define $\phi(\mathbf{x}, t)$ como la función conjunto de nivel que describe la forma en cada momento de la evolución. Diferenciando $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ con respecto a t se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0. \quad (8.42)$$

Escribiendo $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ como $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ y usando (8.40), queda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + |\nabla \phi| \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (8.43)$$

Usando (8.39) se obtiene una ecuación del tipo *Hamilton-Jacobi* para describir la evolución de la función conjunto de nivel, se tiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F(\mathbf{x}, t) \cdot |\nabla \phi| = 0 \quad (8.44)$$

con $F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$.

Para la reconstrucción de formas reduciendo el coste el análisis realizado se enfoca en un proceso directo de reconstrucción de formas llamado “reconstrucción de forma con reducción del funcional de coste”. La idea es *seleccionar* en (8.38) una función de velocidad $F(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ tal que $\left. \frac{\partial \mathcal{J}(K)}{\partial t} \right|_{t=0} \leq 0$. Entonces, al menos para el caso $\left. \frac{\partial \mathcal{J}(K)}{\partial t} \right|_{t=0} < 0$, el funcional de coste disminuirá durante un pequeño intervalo de tiempo en una evolución artificial en tiempo $[0, \tau]$. En el caso de $\left. \frac{\partial \mathcal{J}(K)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ es necesario evaluar la forma actual para determinar si corresponde a un mínimo global ó local del funcional de coste. Una selección obvia para $F(\mathbf{x})$ es la dirección de disminución del coste

$$F_{\text{sd}}(\mathbf{x}) = - \left\{ (K_i - K_e) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \right\} \quad \text{para } \mathbf{x} \in \partial D. \quad (8.45)$$

Las direcciones de reducción del coste han sido especificadas hasta el momento solo directamente en la frontera ∂D , pero deben ser aplicadas en el dominio completo Ω al usar (8.44). Por consiguiente, es necesario extender la dirección de reducción de coste desde ∂D a todo el dominio Ω . Este procedimiento corresponde a encontrar *extensión de velocidades* [109, 125] en

esquemas clásicos de evolución de formas para la propagación de frentes usando la técnica de conjunto de nivel.

Uniando (2.15) en (8.44) se obtiene la ecuación del tipo Hamilton-Jacobi para la evolución de la función de conjunto de nivel a ser resuelta durante el intervalo de tiempo $[0, \tau]$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F_{\text{sd}} |\nabla \phi| = 0 \quad (8.46)$$

Usando, por ejemplo, un esquema de discretización directo con diferencias finitas, se tiene:

$$\frac{\phi(\tau) - \phi(0)}{\tau} + F_{\text{sd}} |\nabla \phi| = 0. \quad (8.47)$$

Interpretando $\phi^{(n+1)} = \phi(\tau)$ y $\phi^{(n)} = \phi(0)$, se llega a la iteración

$$\phi^{(n+1)} = \phi^{(n)} + \tau \delta \phi^{(n)}, \quad \phi^{(0)} = \phi_0 \quad (8.48)$$

donde τ es el tamaño del paso (el cual podría ser determinado por una estrategia de búsqueda sobre líneas) y donde

$$\delta \phi^{(n)} = F_{\text{sd}} |\nabla \phi^{(n)}| = - |\nabla \phi^{(n)}| \left\{ (K_i - K_e) \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K) \right\} \quad (8.49)$$

para $\mathbf{x} \in \partial D$.

En este trabajo no se presentan desarrollos asociados a esquemas numéricos para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi, la razón de esto, es que en la literatura existen un gran número de publicaciones enfocadas en este tema (ver, por ejemplo, [75, 109, 110, 125, 126]). Esto incluye las condiciones de CFL (Courant-Friedrichs-Levy), re-inicialización de las funciones de conjunto de nivel, funciones de distancia, el método de fast marching, esquema de alto orden hacia adelante como el ENO (essentially non-oscillating) y el WENO (weighted essentially non-oscillating), solución de viscosidad artificial, discretizaciones de los términos de la curvatura promedia de la función de conjunto de nivel, etc., todos estos aspectos son ampliamente usados en la práctica. Sin embargo, es importante destacar que es necesario una selección cuidadosa de los esquemas de discretización numérica y de los parámetros de regularización para lograr una solución estable y eficiente del problema de reconstrucción de formas.

Obsérvese que la derivación de la ecuación de velocidad $F(\mathbf{x}, t)$ se basa en la suposición de que cada punto de la interfase en movimiento tiene una

normal exterior definida a lo largo de ∂D . Cuando ocurran cambios topológicos, típicamente la normal a la curva no está claramente definida en todos los puntos de la frontera de las formas. En estas situaciones el cálculo de las velocidades que reducen el residuo no es tan directo.

APÉNDICE 3.3. Cambios Topológicos

En este apéndice se presenta un enfoque para modelar cambios topológicos durante la evolución de la forma.

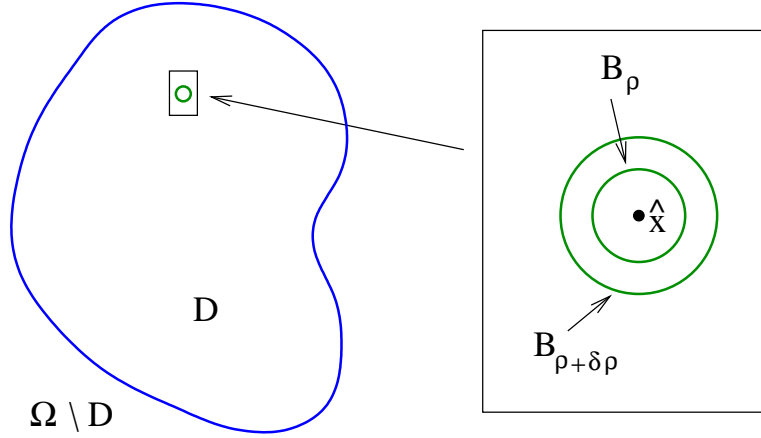
Derivadas topológicas

En lo siguiente se dan bases más solidas del concepto de 'derivada topológica'. Este es un concepto muy reciente, y es necesario poner esfuerzo para entender los detalles de este concepto en aplicaciones reales de inversión de formas (ver [18, 128, 129, 61, 63, 52, 53, 24, 27]).

El análisis de la sensibilidad de las formas que se ha discutido anteriormente asume que existe al menos una forma en el dominio y se trata de deformar sin mayores cambios en su topología. Sin embargo, esta estrategia no permite la creación de nuevos componentes topológicos de las formas, cambiar la topología o simplemente crear formas lejos de las fronteras existentes. El concepto que se discute en esta parte tiene el objetivo de llenar ese espacio. Esto permitirá resolver problemas inversos donde la topología no es conocida desde el principio pero necesita ser determinada a partir de los datos. Se seguirán las ideas generales descritas en las referencias [18, 19, 26, 27, 52, 53, 61, 91, 105, 124, 128, 129].

La derivada topológica que se describe en esta parte del trabajo se relaciona con la introducción de un pequeño agujero (llamado B_ρ) dentro de una forma existente D , ó añadiendo un nuevo objeto (llamado D_ρ) dentro del material base a una distancia lejana de las formas existentes D (ver la figura 8.1). Aquí se expondrá el primer proceso, que consiste en añadir un pequeño agujero en la forma existente. La situación complementaria de crear una forma sigue el mismo procedimiento.

Se define $\tilde{D}_\rho = D \setminus B_\rho$, donde el índice ρ indica el tamaño del agujero B_ρ , y donde se asume que el nuevo agujero definido por su índice está centrado en un punto dado $\hat{\mathbf{x}}$. (En otras palabras uno tiene $\hat{\mathbf{x}} \in B_\rho \subset B_{\rho'}$ para cualquier $0 < \rho < \rho' < 1$.) Se asume que todas las fronteras son lo suficientemente suaves. Se considera un funcional de coste $\mathcal{J}(D)$ que depende de la forma D .

Figura 8.1: Creando un agujero B_ρ dentro de la forma D .

Entonces, la derivada topológica \mathcal{D}_T es definida como

$$\mathcal{D}_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\tilde{D}_\rho) - \mathcal{J}(D)}{f(\rho)}, \quad (8.50)$$

donde $f(\rho)$ es una función que tiende a cero de forma monótona, por ejemplo, $f(\rho) \rightarrow 0$ para $\rho \rightarrow 0$. Con esta definición, se obtiene la expansión asintótica

$$\mathcal{J}(\tilde{D}_\rho) = \mathcal{J}(D) + f(\rho)\mathcal{D}_T(\hat{\mathbf{x}}) + o(f(\rho)). \quad (8.51)$$

Aplicaciones anteriores de esta técnica [26, 27, 124] se enfocaron en la introducción de agujeros circulares en un dominio dado en conexión a los problemas de Dirichlet ó Neumann para la ecuación de Laplace. Aquí, la función $f(\rho)$ esta determinada principalmente por factores geométricos de la forma creada, y la derivada topológica $\mathcal{D}_T(\hat{\mathbf{x}})$ puede ser determinada resolviendo un problema directo y un problema adjunto para la ecuación de Laplace. De hecho para el *problema de Neumann para la ecuación de Laplace* usando un agujero esférico la relación (8.50) toma la forma original introducida en [26, 27, 124] donde $f(\rho)$ es simplemente el negativo del volumen de la esfera, por ejemplo $f(\rho) = -\pi\rho^2$ en 2D y $f(\rho) = -4\pi\rho^3/3$ en 3D. Para más detalles y ejemplos ver [27]. En general, los detalles del comportamiento del límite en (8.50), así como el de la función $f(\rho)$ si el límite existe, depende fuertemente de la forma del agujero, de la condición de frontera de la interfase del agujero y de la ecuación de derivadas parciales asociada.

Un intento hecho recientemente para encontrar definiciones alternativas para la derivada topológica ha sido publicado en [52, 53, 105]. En lugar de aplicar el criterio de que un agujero es 'creado', la derivada topológica se modela usando un proceso de límite donde un agujero existente se reduce hasta que desaparece. Es decir, se perturba el parámetro ρ de un agujero existente por una cantidad pequeña $\delta\rho$. Entonces, el funcional de coste $\mathcal{J}(\tilde{D}_\rho)$ es perturbado a $\mathcal{J}(\tilde{D}_{\rho+\delta\rho})$, y el siguiente límite aparece,

$$\mathcal{D}_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\tilde{D}_{\rho+\delta\rho}) - \mathcal{J}(\tilde{D}_\rho)}{f(\rho + \delta\rho) - f(\rho)} \right\}. \quad (8.52)$$

En [52, 105] los autores muestran una relación entre (8.50) y (8.52), lo que se expresa como

$$\mathcal{D}_T(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{D}_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\rho)|\mathbf{V}|} \mathcal{D}_{\mathbf{V}_n}(\rho) \quad (8.53)$$

donde $\mathcal{D}_{\mathbf{V}_n}(\rho)$ es una forma específica de una 'derivada de forma' relacionada a una velocidad de flujo \mathbf{V}_n en la dirección normal interna de la frontera ∂B_ρ con velocidad $|\mathbf{V}_n|$. Para más detalles ver [52, 105]. Una conexión que relaciona la 'derivada de forma' y la derivada topológica ha sido demostrada en [27].

El uso práctico de la derivada topológica en el proceso de inversión de formas se encuentra estrechamente relacionado a situaciones de la vida real, donde se puede establecer una clara relación entre los casos que usan representación de las formas usando el método de conjunto de nivel y los casos que involucran las derivadas topológicas. En la práctica un pequeño agujero ó un pequeño objeto es colocado en alguna posición del dominio de búsqueda donde la derivada topológica asociada es la más negativa, por ejemplo en el lugar donde un cambio topológico tiende a reducir el funcional de coste.

Conjuntos de nivel cero con $|\nabla\phi| = 0$.

En lo siguiente presentamos una descripción más intuitiva pero menos estricta de los cambios topológicos cuando se usa una función de conjunto de nivel para la descripción de las formas.

Se considera de nuevo la evolución de la función conjunto de nivel en el dominio completo a través de una función general $f(\mathbf{x})$ como se describió en

las secciones anteriores. Esta función de evolución podría por ejemplo ser creada usando (2.15), la cual simplemente desprecia la distribución delta de Dirac en la dirección de descenso del funcional de coste y aplica las correcciones calculadas a la función conjunto de nivel en cada celda de Ω . Se toma considerando un punto arbitrario \mathbf{x}_s en Ω que asume que la función conjunto de nivel $\phi(\mathbf{x})$ es continua y dos veces diferenciable en una vecindad de \mathbf{x}_s . Entonces, podemos expandir $\phi(\mathbf{x})$ localmente alrededor de \mathbf{x}_s en su serie de Taylor de segundo grado

$$\phi(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}_s) + \langle \nabla \phi(\mathbf{x}_s), \mathbf{y} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{H}\phi(\mathbf{x}_s) \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + O(|\mathbf{y}|^3) \quad (8.54)$$

donde $\mathcal{H}\phi(\mathbf{x}_s)$ representa la matriz Hessiana de ϕ en \mathbf{x}_s . En lo anterior se ha considerado la evolución de los puntos de la frontera $\mathbf{x}_s \in \partial D$ donde $\phi(\mathbf{x}_s) = 0$ y $|\nabla \phi(\mathbf{x}_s)| \neq 0$. En este caso se podría definir la dirección normal externa y la curvatura en la frontera en términos de $\nabla \phi$ de acuerdo a (8.40), (8.41). En esta sección se discuten las situaciones donde ambos $\phi(\mathbf{x}) = 0$ y $\nabla \phi(\mathbf{x}_s) = 0$ pero $\mathcal{H}\phi(\mathbf{x}_s) \neq 0$. Estas situaciones normalmente ocurren cuando se presentan cambios topológicos. Por simplicidad, se discutirá el caso en dos dimensiones.

A partir de los cálculos es conocido que si $\mathcal{H}\psi(\mathbf{x}_s)$ es positivo (negativo) definido, entonces ψ posee un mínimo (máximo) local en \mathbf{x}_s . Si $\mathcal{H}\psi(\mathbf{x}_s)$ es indefinido en \mathbf{x}_s , no hay extremo en ese punto. Tres ejemplos canónicos de estas situaciones son

$$\mathcal{H}\psi_1(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}\psi_2(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}\psi_3(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8.55)$$

Obviamente, ψ_1 toca el conjunto de nivel cero desde arriba, mientras ψ_2 lo toca desde abajo, y ψ_3 tiene un punto de silla en el conjunto de nivel cero (ver figura 8.2). Al añadir una pequeña perturbación $h(\mathbf{x})$ a ψ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, se puede escribir la expansión de Taylor como:

$$h(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}_s) + \langle \nabla h(\mathbf{x}_s), \mathbf{y} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{H}h(\mathbf{x}_s) \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + O(|\mathbf{y}|^3). \quad (8.56)$$

Entonces, la suma $\psi = \psi_i + h$ obviamente tiene la expansión

$$\psi_i(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}_s) + \langle \nabla h(\mathbf{x}_s), \mathbf{y} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{H}(\psi_i(\mathbf{x}_s) + h(\mathbf{x}_s)) \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + O(|\mathbf{y}|^3) \quad (8.57)$$

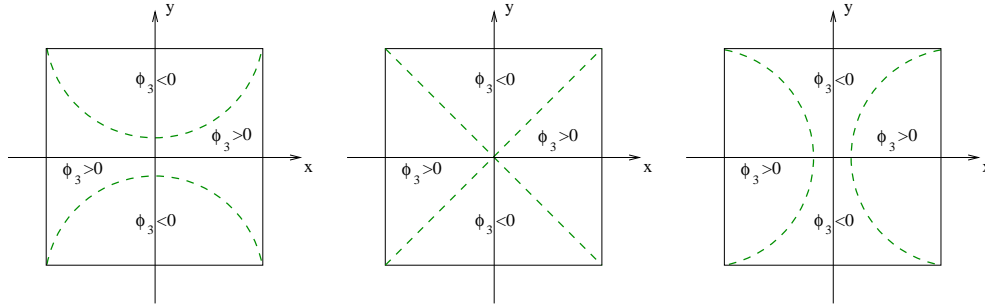


Figura 8.2: Cambios topológicos cuando se añade una pequeña perturbación h a ψ_3 . Centro: sin perturbación, $h \equiv 0$; derecha: con perturbación $h(\mathbf{x}_s) < 0$; izquierda: con perturbación $h(\mathbf{x}_s) > 0$.

donde $i = 1, 2, 3$ representan la forma correspondiente a ψ_i para D_i y la nueva forma correspondiente a ψ_i para \tilde{D}_i . En el caso definido positivo se tiene $i = 1$ en (8.55). Aquí, el punto \mathbf{x}_s es un punto aislado con $\psi(\mathbf{x}_s) = 0$ en el exterior de la forma anterior D_1 . Si $h(\mathbf{x}_s) > 0$, el punto \mathbf{x}_s se encuentra claramente fuera de \tilde{D}_i . Sin embargo, si $h(\mathbf{x}_s) < 0$, entonces \mathbf{x}_s abarca una región vecina (siendo $|\mathbf{y}|$ suficientemente pequeña en (8.57)) con valores negativos de ψ_1 , tal que una nueva forma ha sido creada alrededor \mathbf{x}_s . En otras palabras, un cambio topológico ha ocurrido. El escenario contrario es descrito por ψ_2 , donde \mathbf{x}_s representa un punto aislado con $\psi_2(\mathbf{x}_s) = 0$ en una vecindad de valores estrictamente negativos de $\psi_2(\mathbf{x}) = 0$. Añadiendo una perturbación h con $h(\mathbf{x}_s) > 0$ se crea un agujero dentro de la nueva forma \tilde{D}_2 .

Se puede observar fácilmente que la función conjunto de nivel ψ_3 (indicada en la figura 8.2) describe la situación de dos partes de una forma D_3 que se tocan en el punto \mathbf{x}_s , y al mismo tiempo hay dos partes de $\Omega \setminus D$ las cuales también se tocan en \mathbf{x}_s (imagen central de la figura 8.2). Añadiendo una perturbación h con $h(\mathbf{x}_s) < 0$ (imagen derecha de la figura 8.2) las dos partes de contacto de la forma D_3 'se reúnen' donde las dos partes de $\Omega \setminus D_3$ 'se separan' formando \tilde{D}_3 . En la situación de $h(\mathbf{x}_s) > 0$ (imagen izquierda de la figura 8.2) esta es solo la otra forma alrededor: las dos partes de contacto de D_3 'se separan' y las dos partes de $\Omega \setminus D_3$ 'se reúnen' cuando se forma \tilde{D}_3 .

La relevancia de esta observación para el problema de reconstrucción de formas es claro. Cuando durante la evolución de la forma ocurre que $\phi(\mathbf{x}) = 0$ y $\nabla\phi(\mathbf{x}_s) = 0$ (pero $\mathcal{H}\phi(\mathbf{x}_s) \neq 0$), se debe encontrar una corrección $h(\mathbf{x})$ en el punto que reduce el funcional de coste. En los primeros dos casos de $i = 1$

y $i = 2$ esto conduce directamente al concepto de *derivada topológica*, donde en el tercer caso $i = 3$ esto conduce a la decisión de separar o unir algunas formas.

APÉNDICE 3.4. Más de dos litofacies (I)

En lo siguiente describimos varias técnicas desarrolladas en la literatura para representar más que dos fases usando conjuntos de nivel.

Una generalización directa de la técnica descrita en la sección 2.1 consiste en usar conjuntos de nivel adicionales de una función lo suficientemente suave (por ejemplo, Lipschitz continua), además del conjunto de nivel cero, con la idea de describir regiones diferentes de un dominio dado [88, 156, 92]. Por ejemplo, se puede definir

$$\Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad \psi(\mathbf{x}) = c_i\} \quad (8.58)$$

$$D_i = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad c_{i+1} < \psi(\mathbf{x}) < c_i\} \quad (8.59)$$

donde c_i son valores previamente especificados con $c_{i+1} > c_i$ para $i = 0, \dots, \underline{i}-1$, y con $c_0 = +\infty$, $c_{\underline{i}} = -\infty$. Entonces, se tiene

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\underline{i}} D_i, \quad \text{con} \quad D_i \cap D_{i'} = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq i'. \quad (8.60)$$

Sin embargo, está claro que se deben imponer ciertas restricciones topológicas sobre la distribución de las regiones D_i a partir de esta formulación. Este tipo de aplicaciones se presentan en [88].

En [83] se presenta una alternativa interesante para describir múltiples fases de un dominio a partir de una sola función de conjunto de nivel en la aplicación de segmentación de imágenes. Esto se hace asumiendo que existe una función de conjunto de nivel que puede tomar solo un pequeño número de valores diferentes y predeterminados, por ejemplo,

$$\psi(\mathbf{x}) = i \quad \text{en} \quad D_i, \quad \text{para} \quad i = 0, \dots, \underline{i}, \quad (8.61)$$

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\underline{i}} D_i, \quad \text{con} \quad D_i \cap D_{i'} = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq i'.$$

Introduciendo una serie de funciones base γ_i

$$\gamma_i = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i (\psi - j) \quad \text{con} \quad \alpha_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i (i - j), \quad (8.62)$$

podemos definir la distribución de parámetros $K(\mathbf{x})$ como

$$K = \sum_{i=1}^i c_i \gamma_i. \quad (8.63)$$

A partir de (8.61)-(8.63) se obtiene

$$K(\mathbf{x}) = c_i \quad \text{para } \mathbf{x} \in D_i. \quad (8.64)$$

Algunos resultados numéricos obtenidos usando este modelo se presentan en [83].

APÉNDICE 3.5. Más de dos litofacies (II)

En esta sección se discuten tres metodologías donde se usan más de una función de conjunto de nivel para modelar situaciones de múltiples fases.

En [156] la idea que se discute es usar una función de conjunto de nivel individual para cada fase en una aplicación para describir el movimiento de varias fases, con la idea de crear un vector de funciones de conjuntos de nivel, por ejemplo

$$\Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad \psi_i(\mathbf{x}) = 0\} \quad (8.65)$$

$$D_i = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad \psi_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (8.66)$$

para funciones de conjunto de nivel lo suficientemente suaves (del tipo Lipschitz continuas) ψ_i , $i = 0, \dots, i$. En esta formulación, se necesita tomar especial cuidado para tratar bien o evitar el solapamiento de fases diferentes, ya que esto no se encuentra automáticamente incorporado en el modelo. Para más detalles de como manejar este tipo de situaciones y otras similares ver [156]. Despreciando estos detalles específicos, la formulación para encontrar direcciones de disminución del funcional de coste sigue la misma línea que las formulaciones anteriormente discutidas para una sola función de conjunto de nivel, y por lo tanto se omite su derivación en esta parte.

Una forma alternativa de describir las diferentes fases usando más que una función de conjunto de nivel fue introducida en la literatura por [142] en la aplicación de segmentación de imágenes y posteriormente fue investigada en más profundidad por [14, 29, 28, 51, 86, 138] en el área de problemas inversos. Esta consiste en definir varias funciones de conjuntos de nivel y evolucionarlas [103, 87]. Particularmente en el contexto de inversión de formas usando datos electromagnéticos se encuentran los trabajos de [88] los cuales desarrollan una estrategia de conjunto de nivel por etapas en el cual las propiedades de los materiales se codifican sobre la base de una forma binaria, donde los pares codificados evolucionan. Aquí se presenta un ejemplo de ello.

Si se asume que se quiere modelar y recuperar un objeto que consiste con cuatro regiones diferentes D_ν , $\nu \in \{1, 2, 3, 4\}$, cada una de ellas posiblemente constituida por subregiones no conectadas y con su propio valor de parámetro K_ν . El objetivo es reconstruir las formas y los valores de los parámetros simultáneamente a partir de los datos.

Para describir la distribución de cuatro formas en el dominio Ω se definen dos funciones de conjunto de nivel ψ_1 y ψ_2 combinadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}) = & K_1(1 - H(\psi_1))(1 - H(\psi_2)) + K_2(1 - H(\psi_1))H(\psi_2) \\ & + K_3H(\psi_1)(1 - H(\psi_2)) + K_4H(\psi_1)H(\psi_2) \end{aligned} \quad (8.67)$$

donde los valores del contraste K_ν , $\nu = 1, \dots, 4$ varían de manera suave dentro de cada región. Las cuatro regiones diferentes son codificadas como

$$\begin{aligned} D_1 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 \leq 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 \leq 0 \} \\ D_2 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 \leq 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 > 0 \} \\ D_3 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 \leq 0 \} \\ D_4 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 > 0 \} \end{aligned} \quad (8.68)$$

Esto genera una cobertura completa del dominio Ω a partir de las cuatro regiones, cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ es parte de exactamente una de las cuatro formas D_ν , ver la figura 8.3.

Se define $\mathbf{b} = (K_1, \dots, K_4)$ y se escribe el funcional de coste en la forma

$$\mathcal{J}(\psi_1, \psi_2, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(\psi_1, \psi_2, \mathbf{b})\|^2. \quad (8.69)$$

En este punto se busca una familia de leyes de evolución que aseguran la disminución del funcional de coste. Estas leyes son

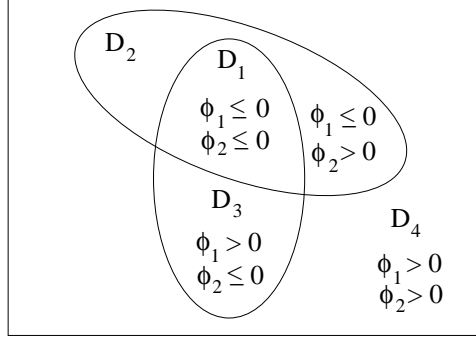


Figura 8.3: Representación de múltiples formas usando la función conjunto de nivel por etapa.

$$\frac{d\psi_1}{dt} = f_1(\mathbf{x}, t, \dots); \quad \frac{d\psi_2}{dt} = f_2(\mathbf{x}, t, \dots); \quad (8.70)$$

$$\frac{dK_\nu}{dt} = \hat{f}_\nu(\mathbf{x}, t, \dots), \quad \nu = 1, \dots, 4. \quad (8.71)$$

f_1 , f_2 y \hat{f}_ν son funciones reales. Usando de nuevo la regla de la cadena, se tiene formalmente

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{\partial K}{\partial \psi_1} \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{\partial K}{\partial \psi_2} \frac{d\psi_2}{dt} + \sum_{\nu=1}^4 \frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{\partial K}{\partial K_\nu} \frac{dK_\nu}{dt}. \quad (8.72)$$

A partir de (8.67) se encuentra la expresión para $\frac{\partial K}{\partial \psi_1}$, $\frac{\partial K}{\partial \psi_2}$, $\frac{\partial K}{\partial K_1}$ y $\frac{\partial K}{\partial K_2}$. Procediendo de la misma forma que antes, se obtienen las contribuciones correspondientes a (8.72). Ahora se presentan las dos expresiones características que son verificadas fácilmente:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{\partial K}{\partial \psi_1} \frac{d\psi_1}{dt} = \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \frac{\partial K}{\partial \psi_1} \frac{d\psi_1}{dt} \right\rangle_P \quad (8.73)$$

$$= \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \delta(\psi_1) \left[(K_3 - K_1)(1 - H(\psi_2)) + (K_4 - K_2)H(\psi_2) \right] f_1(\mathbf{x}, t, \dots) \right\rangle_P,$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{\partial K}{\partial K_1} \frac{dK_1}{dt} = \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), \frac{\partial K}{\partial K_1} \frac{dK_1}{dt} \right\rangle_P \quad (8.74)$$

$$= \left\langle \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K), (1 - H(\psi_1))(1 - H(\psi_2)) \hat{f}_1(\mathbf{x}, t, \dots) \right\rangle_P.$$

Como un *caso especial* de (8.74), si se asume que los valores de los parámetros K_ν son *constantes dentro de cada región*, los términos \hat{f} no dependen de la variable del espacio \mathbf{x} tal que (8.74) se convierte en

$$\frac{d\mathcal{J}}{dK} \frac{\partial K}{\partial K_1} \frac{dK_1}{dt} = \hat{f}_1(t, \dots) \int_{D_1} \mathcal{R}'(K)^* \mathcal{R}(K)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (8.75)$$

donde la región D_1 es definida por (8.68). Ahora es fácil definir las direcciones de descenso del funcional de coste como f_1 , f_2 y \hat{f}_ν , $\nu = 1, \dots, 4$, las cuales reducen simultáneamente el coste (8.69) durante la evolución (8.70)-(8.71).

Una variación del modelo de conjunto de nivel con múltiples niveles de funciones suaves es el uso de más de una función de conjunto de nivel de funciones binarias y ha sido propuesto en [83] para la aplicación de segmentación de imágenes. De forma similar a la discusión anterior, aquí se restringe la descripción al caso de las cuatro fases usando dos funciones de conjunto de nivel (variables) ψ_1 y ψ_2 . En el modelo de conjunto de nivel binario, las dos funciones conjunto de nivel deben satisfacer:

$$\psi_i \in \{-1, 1\}, \quad \text{ó} \quad \psi_i^2 = 1, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (8.76)$$

La función de parámetros $K(\mathbf{x})$ viene dada por (8.67). Las cuatro regiones diferentes vienen dadas por

$$\begin{aligned} D_1 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 = -1 \quad \text{y} \quad \psi_2 = -1 \} \\ D_2 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 = -1 \quad \text{y} \quad \psi_2 = +1 \} \\ D_3 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 = +1 \quad \text{y} \quad \psi_2 = -1 \} \\ D_4 &= \{ \mathbf{x}, \quad \psi_1 = +1 \quad \text{y} \quad \psi_2 = +1 \}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Combinando (8.76), (8.67) y (8.77), la función de parámetro $K(\mathbf{x})$ obtiene la forma

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4} \left(K_1(\psi_1 - 1)(\psi_2 - 1) - K_2(\psi_1 - 1)(\psi_2 + 1) \right. \\ &\quad \left. - K_3(\psi_1 + 1)(\psi_2 - 1) + K_4(\psi_1 + 1)(\psi_2 + 1) \right). \end{aligned} \quad (8.78)$$

Las direcciones de gradiente para un funcional de coste dado pueden ser calculadas de forma similar como en la sección 8. Para más detalles ver [83, 103].

En la aplicación de caracterización de yacimientos las técnicas descritas anteriormente no funcionan de manera satisfactoria en nuestros experimentos numéricos. Por ejemplo, usando dos funciones de conjunto de nivel para caracterizar cuatro litofacies se generan valores erróneos en las zonas críticas o de solape que no tienen justificación física en estas zonas. Por eso, se desarrollan en esta tesis estrategias alternativas para tratar esta aplicación importante.

APÉNDICE 4. Estrategias de regularización para la inversión de formas

Cuando se aplican las correcciones a la función de conjunto de nivel basadas en las direcciones de gradiente que reducen el funcional de coste, en ocasiones se obtienen fronteras muy irregulares en la función conjunto de nivel después de varios pasos de tiempo. Si existe ruido en los datos, es necesario introducir herramientas para alcanzar una solución estable. Esto conduce al concepto de regularización. En la próxima parte se describen algunas posibilidades para incorporar regularización en los esquemas de reconstrucción de formas usando el método de conjuntos de nivel. Esta selección incluye solo pocas de las bien conocidas herramientas de regularización que pudiesen ser adaptadas a esta clase de problemas inversos (para una vista general de las técnicas de regularización en problemas inversos ver [49, 99, 149].)

Regularización suavizando las correcciones de la función de conjunto de nivel

Considerando el operador $\mathcal{T}(\psi) = \mathcal{R}(\Pi(\psi))$. Diferenciación formal por la regla de la cadena da

$$\mathcal{T}'(\psi) = \mathcal{R}'(\Pi(\psi))\Pi'(\psi). \quad (8.79)$$

La dirección de gradiente (formal) del funcional de coste por mínimos cuadrados

$$\hat{\mathcal{J}}(\psi) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(K(\psi))\|_Z^2 \quad (8.80)$$

viene dado por

$$\mathbf{grad}_{\hat{\mathcal{J}}}(\psi) = \mathcal{T}'(\psi)^* \mathcal{T}(\psi) \quad (8.81)$$

donde $\mathcal{T}'(\psi)^*$ es el L_2 -adjunto de $\mathcal{T}'(\psi)$. Se tiene

$$\Pi'(\psi) = (K_i - K_e)\delta(\phi) \quad (8.82)$$

donde la distribución delta de Dirac $\delta(\phi)$, sin embargo, aquí será aproximado por una función L_2 -adecuada. En las implementaciones numéricas, se usarán, por ejemplo, la función de bandas $\chi_{\psi,d}(\mathbf{x})$ como se define en la sección 2.1 para este propósito. Entonces, se puede escribir

$$\mathcal{T}'(\psi)^* = \Pi'(\psi)^* \mathcal{R}'(\Pi(\psi))^*. \quad (8.83)$$

Asumiendo que $\psi \in W_1(\Omega)$ donde

$$W_1(\Omega) = \{\psi : \psi \in L_2(\Omega), \nabla \psi \in L_2(\Omega), \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \quad (8.84)$$

se necesita reemplazar el operador adjunto $\mathcal{T}'(\psi)^*$ por el nuevo operador adjunto $\mathcal{T}'(\psi)^\circ$ que mapea el espacio de los datos en el espacio de Sobolev $W_1(\Omega)$. Usando el producto interno con pesos se tiene:

$$\langle v, w \rangle_{W_1(\Omega)} = \alpha \langle v, w \rangle_{L_2(\Omega)} + \beta \langle \nabla v, \nabla w \rangle_{L_2(\Omega)} \quad (8.85)$$

donde $\alpha \geq 1$ y $\beta > 0$ son parámetros de regularización cuidadosamente seleccionados. Así se obtiene

$$\mathcal{T}'(\psi)^\circ = (\alpha I - \beta \Delta)^{-1} \mathcal{T}'(\psi)^*. \quad (8.86)$$

El operador definido positivo $(\alpha I - \beta \Delta)^{-1}$ tiene el efecto de proyectar el gradiente $\mathcal{T}'(\psi)^* \mathcal{T}(\psi)$ desde $L_2(\Omega)$ hacia el espacio de Sobolev $W_1(\Omega)$. De hecho, la selección de los parámetros de peso α y β visualmente tendrá el efecto de regularizar la corrección en diferente grado. En particular, oscilaciones de alta frecuencia ó discontinuidades de las correcciones para la función conjunto de nivel son eliminadas, lo que permite obtener formas con fronteras más regulares.

Expresando $f_r = \mathcal{T}'(\psi)^\circ \mathcal{T}(\psi)$ y $f_a = \mathcal{T}'(\psi)^* \mathcal{T}(\psi)$, f_r puede ser formalmente interpretado como el minimizador del funcional de coste

$$\hat{\mathcal{J}}(f) = \frac{\alpha - 1}{2} \|f\|_{L_2}^2 + \frac{\beta}{2} \|\nabla f\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|f - f_a\|_{L_2}^2. \quad (8.87)$$

En particular, el proceso de minimización de (8.87) puede ser comprobado aplicando un método de gradiente en lugar de aplicar explícitamente $(\alpha I - \beta \Delta)^{-1}$ a f_a . El flujo del gradiente (8.87) genera una ecuación de calor modificada (ó difusión) de la forma

$$\begin{aligned} v_t - \beta \Delta v &= f_d - \alpha v \quad \text{para } t \in [0, \tau] \\ v(0) &= f_d, \end{aligned} \tag{8.88}$$

con un termino de calor dependiente del tiempo $f_d - \alpha v$, cuya solución evoluciona hacia el minimizador f_r de (8.87) para $\tau \rightarrow \infty$. Prácticamente, se comprueba que se logra un buen efecto de regularización en lugar de (8.88), resolviendo la ecuación de calor para algunos pasos de tiempo:

$$\begin{aligned} v_t - \beta \Delta v &= 0 \quad \text{para } t \in [0, \tau] \\ v(0) &= f_d, \end{aligned} \tag{8.89}$$

con un τ pequeño, usando $\hat{v} = v(\tau)$ en lugar de f_r como corrección. Para más detalles ver [60, 45].

El esquema de regularización descrito solo se aplica sobre las correcciones (ó términos f en la ecuación de evolución), pero *no* sobre la función de conjunto de nivel directamente. En particular, en el caso que una solución satisfactoria del problema de reconstrucción de formas ha sido alcanzada tal que los residuos cumplen un criterio de parada, entonces la evolución será detenida.

Bibliografía

- [1] Aanonsen S.I. Efficient History Matching Using a Multiscale Technique, proc. 2005 SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, 31 Jan-2 Feb 2005, *Paper SPE 92758*.
- [2] Aanonsen S.I. and Eydinov D. A multiscale method for distributed parameter estimation with application to reservoir history matching, *Computational Geosciences*, 9(4), 2005.
- [3] Abubakar A. and Van Den Berg P. V 2001. Total variation as a multiplicative constraint for solving inverse problems *IEEE Trans. Image Process.* **10** 1384–92
- [4] Abubakar A. and van den Berg P. V. 2002. The contrast source inversion method for location and shape reconstructions. *Inverse Problems* **18** 495–510
- [5] Abubakar A. and Van Den Berg P. V. 2004. Iterative forward and inverse algorithms based on domain integral equations for three-dimensional electric and magnetic objects. *J. Comp. Phys.* **195** 236–62
- [6] Ahmed Ouenes, Lee J. Hartley, AEA Technology. Integrated Fractured Reservoir Modeling Using Both Discrete and Continuum Approaches. *SPE Paper 62939*
- [7] Alexandrov O. and Santosa F. 2005. A topology preserving level set method for shape optimization. *J. Comput. Phys.* **204** 121–130
- [8] Allaire G., Jouve F. and Toader. A-M 2004. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method *J. Comput. Phys* **194** 363–93

- [9] Aminzadeh Fred, Patrick Wong, Masoud Nikraves. Soft Computing for Reservoir Characterization and Modeling.,2002, Springer
- [10] Bard Y. Comparison of gradient methods for the solution of nonlinear parameter estimation problem. 1970.
- [11] Bal G. and Ren K. 2005. Reconstruction of singular surfaces by shape sensitivity analysis and level set method *preprint*
- [12] Berg J. M. and Holmstrom K. 1999. On parameter estimation using level sets *SIAM J. Control Optim.* **37** 1372–93
- [13] Liu X., Liu G.R., Tai K., Lam K.Y. Radial Point Interpolation Collocation Method (RPICM) For the Solution of Two Phase Flow Through Porous Media. *Third International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries. CSIRO. Melbourne. Australia. 10-12 December 2003*
- [14] Berre I., Lien M., Mannseth T. 2005. A level set corrector to an adaptive multiscale permeability prediction. *preprint*
- [15] Berre I., Lien M. and Mannseth T. A Level Set Corrector to an Adaptive Multiscale Permeability Prediction. Submitted to Computational Geosciences. 2004
- [16] Bissell R. *History matching a reservoir model by the positioning of geological objects.* ECMOR V. Leoben. 1996
- [17] Bonnet M. 1995. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems *Eng. Anal. Bound. Elem.* **15** 121–36.
- [18] Bonnet M. and Guzina B. 2003 Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* **61** 2344–73
- [19] Bonnet M. and Constantinescu A. 2005. Inverse problems in elasticity *Inverse Problems* **21** R1–R50
- [20] Bourdarot. *Well test Analysis*, Instituto frances del petróleo. 2000.
- [21] Burger M. 2001. A level set method for inverse problems. *Inverse Problems* **17** 1327–55

- [22] Burger M. 2003. A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction. *Interf. Free Bound.* **5** 301–29.
- [23] Burger M. 2004. Levenberg-Marquardt level set methods for inverse obstacle problems. *Inverse Problems* **20** 259–82
- [24] Burger M., Hackl B. and Ring W. 2004. Incorporating topological derivatives into level set methods. *J. Comp. Phys.* **194** 344–362
- [25] Burger M. and Osher S. 2005. A survey on level set methods for inverse problems and optimal design. *Europ. J. Appl. Math.* **16** 263–301
- [26] C  a J., Gioan A. and Michel J. 1973. Quelques résultats sur l’identification de domaines. *Calcolo fasc. III-IV* 207–32
- [27] C  a J., Garreau S., Guillaume P. and Masmoudi M. 2000. The shape and topological optimizations connection *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **188** 713–26
- [28] Chan T. F., and Tai X. 2003. Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients *J. Comput. Phys.* **193** 40–66.
- [29] Chan T. F. and Tai X. 2003 Identification of discontinuous coefficients in elliptic problems using total variation regularisation. *SIAM J. Sci. Comput.* **25** 881–904.
- [30] Chavent G., and Jaffre, J. Mathematical Methods and Finite Elements for Reservoir Simulation Studies in Mathematics and its Applications. 1986, 17 North-Holland, Amsterdam.
- [31] Crichlow H.B. *Modern Reservoir Engineering-A Simulation Approach*. Prentice Hall. New Jersey. 1976.
- [32] Cuer M. and Zolésio. J-P. 1988. Control of singular problem via differentiation of a min-max. *Systems Control Lett.* **11** 151–58
- [33] Delfour M. C., and Zolésio J-P. 1988. Shape sensitivity analysis via min max differentiability. *SIAM J. Control Optim.* **26** 34–86

- [34] Delfour M. C., and Zolésio J-P. 2001. *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus and Optimization* (SIAM Advances in Design and Control) (Philadelphia: SIAM)
- [35] Dennis J. E. and Schnabel R. B. 1996. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. (SIAM Classics in Applied Mathematics series No. 16). (Philadelphia: SIAM)
- [36] Deutsch Clayton V., Journel André G. 1998. GSLIB, Geostatistical Software Library and User's Guide. Oxford University Press. Oxford
- [37] Dorn O. 1998. A transport-backtransport method for optical tomography. *Inverse Problems* **14** 1107–30
- [38] Dorn O., Bertete-Aguirre H., Berryman J. G., and Papanicolaou G. C. 1999. A nonlinear inversion method for 3D-electromagnetic imaging using adjoint fields. *Inverse Problems* **15** 1523–58
- [39] Dorn O., Miller E. and Rappaport C. 2000. A shape reconstruction method for electromagnetic tomography using adjoint fields and level sets. *Inverse Problems* **16** 1119–56
- [40] Dorn O. 2000. Scattering and absorption transport sensitivity functions for optical tomography. *Optics Express*. **7** 492–506
- [41] Dorn O., Miller E. and Rappaport C. 2001. Shape reconstruction in 2D from limited-view multifrequency electromagnetic data. *Radon Transform and Tomography* (AMS series Contemporary Mathematics. **278**) pp 97–122
- [42] Dorn O., Bertete-Aguirre H., Berryman J. G. and Papanicolaou G. C. 2002. Sensitivity analysis of a nonlinear inversion method for 3D electromagnetic imaging in anisotropic media. *Inverse Problems* **18** 285–317
- [43] Dorn O. 2004. Shape reconstruction in scattering media with voids using a transport model and level sets. *Canad. Appl. Math. Quart.* **10** 239–75
- [44] Dorn O. 2004. Shape reconstruction for an inverse radiative transfer problem arising in medical imaging. *Springer series Computational Science and Engineering*. (Vol. *Numerical Methods for Multidimensional Radiative Transfer Problems*) R. Rannacher (ed.) (Berlin: Springer) *accepted*

- [45] Dorn O., Haber E., Ascher U. and Oldenburg D. 2006 Shape reconstruction in 3D Electromagnetic Induction Tomography using a level set technique. *in preparation*
- [46] Dorn O. *A level set method for shape reconstruction in electromagnetic cross-borehole tomography*. Department of computer Science. University of Columbia. Canada. 2002
- [47] Dorn O., Miller E. L. and Rappaport C. *A shape reconstruction method for electromagnetic tomography using adjoint fields and level sets*. Inverse Problems **16**, 2000. 1119-1156.
- [48] Dorn O. and Lesselier D. 2006. Level set methods for inverse scattering. *Topical Review. Inverse Problems* **22** R67-R131.
- [49] Engl H. W. Hanke M. and Neubauer A. 1996. *Regularization of Inverse Problems*. (*Mathematics and Its Applications* No. 375) (Dordrecht: Kluwer)
- [50] Ewing R., Lin T., and Falk R., *Inverse and ill-posed problems in reservoir simulation, Inverse and Ill-Posed Problem*. Notes and Reports on Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1987, 483-497.
- [51] Fang W. 2005. Multi-phase permittivity reconstruction in electrical capacitance tomography by level set methods. *preprint*
- [52] Feijóo R. A., Novotny A. A., Taroco E. and Padra C. 2003. The topological derivative for the Poisson problem. *Math. Mod. Methods Appl. Scie.* **13** 1–20
- [53] Feijóo G. R. 2004. A new method in inverse scattering based on the topological derivative. *Inverse Problems* **20** 1819–40
- [54] Feijóo G. R., Oberai A. A. and Pinsky P. M. 2004. An application of shape optimization in the solution of inverse acoustic scattering problems. *Inverse Problems* **20** 199-228
- [55] Ferrayé R., Dauvignac J. Y. and Pichot C. 2003. An inverse scattering method based on contour deformations by means of a level set method using frequency hopping technique. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **51** 1100–13

- [56] Ferrayé R., Dauvignac J-Y., and Pichot C. 2003. Reconstruction of complex and multiple shape object contours using a level set method. *J. Electromagn. Waves Applic.* **17** 153-181
- [57] Frühauf F., Scherzer O., and Leitao A. 2005. Analysis of regularization methods for the solution of ill-posed problems involving discontinuous operators. *SIAM J. Num. Analysis* **43** pp 767–786
- [58] Gao G., Zafari M., and Reynolds A. C. Quantifying the uncertainty for the PUNQ-S3 problem in a Bayesian setting with RML and EnKF. In SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, 31 January-2 February 2005. SPE93324.
- [59] Gu Y., and Oliver D. S. History matching of the PUNQ- S3 reservoir model: Using the ensemble Kalman filter. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, 26-29 September 2004. SPE90962.
- [60] González R. P., Kindelan M., Moscoso M., Dorn O. *History matching problem in reservoir engineering using the propagation back-propagation method*. 2005. Inverse Problems.
- [61] Guzina B. B., and Bonnet M. 2004. Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **57** 161–79
- [62] Haber E. 2004. A multilevel level-set method for optimizing eigenvalues in shape design problems. *J. Comp. Phys.* **198** 518–34
- [63] Hackl B. 2006. Methods for reliable topology changes for perimeter regularized geometric inverse problems. *RICAM-Report* **2006-05**
- [64] Haddar H., and Kirsch R. 2004. On the Fréchet derivative for obstacle scattering with an impedance boundary condition. *SIAM J. Appl. Math.* **65** 194–208
- [65] Hadamard J. 1902 Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin, 49-52.
- [66] Harabetian E., and Osher S. 1998. Regularization of ill-posed problems via the level set approach. *SIAM J. Appl. Math.* **58** 1689–1706

- [67] Hestenes M.R. *Conjugate direction method in optimization*. Number 12 in applications of Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
- [68] Hettlich F. 1995. Fréchet derivatives in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems* **11** 371–82
- [69] Hou S., Solna K., and Zhao H. 2004. Imaging of location and geometry for extended targets using the response matrix. *J. Comp. Phys.* **199** 317–38.
- [70] Hvistendahl K., Lie K.A., and Risebro N.H. *A fast marching method for reservoir simulation*. 2000.
- [71] Irishina N., Moscoso M., and Dorn O. 2006. Detection of small tumors in microwave medical imaging using level sets and MUSIC. *Progress in Electromagnetics Research Symposium PIERS 2006*. (Cambridge, March) 43–47
- [72] Ito K., Kunisch K., and Li Z. 2001. Level-set approach to an inverse interface problem. *Inverse Problems* **17** 1225–1242
- [73] Ito K. 2002. Level set methods for variational problems and application. in *Control and Estimation of Distributed Parameter Systems* (ed. W Desch, F Kappel, K Kunisch) (Basel: Birkhäuser) 203–217
- [74] Jon K. Norwegian University of science and technology, principles of reservoir simulation. 2003.
- [75] Kindermann S. 2005. A new iterative regularization method using an equation of Hamilton-Jacobi type *preprint*
- [76] Kirsch A. 1993. The domain derivative and two applications in inverse scattering theory. *Inverse Problems* **9** 81–96.
- [77] Kitanidis P.K. Introduction to geostatistics and applications to hydrogeology. 1997. Cambridge University Press.
- [78] Kolehmainen V., Arridge S. R., Lionheart W. R. B., Vauhkonen M., and Kaipio J. P. 1999. Recovery of region boundaries of piecewise constant coefficients of an elliptic PDE from boundary data. *Inverse Problems* **15** 1375–1391

- [79] Kortschak B., and Brandstätter B. 2005. A FEM-BEM approach using level-sets in electrical capacitance tomography. *COMPEL* **24** 591–605
- [80] Colton D. and Kress R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer. Berlin. 1992.
- [81] Landa J.L., Kamal M.M., Jenkins C.D., and Horne R., *Reservoir characterization constrained to well test data: a field example*. SPE 36511. 1996.
- [82] Leitao A. and Scherzer O. 2003. On the relation between constraint regularization, level sets and shape optimization. *Inverse Problems* **19** L1–L11
- [83] Lie J., Lysaker M., and Tai X. 2005. A variant of the level set method and applications to image segmentation. *Mathematics of Computation* in press.
- [84] Lien M., Mannseth T.: Resolution power of pressure data for permeability identification. To appear in *Transport in Porous Media*.
- [85] Lien M., Jansen J.D., Mannseth T., Brouwer R. Multiscale Regularization of Dynamic Water Flood Optimization. Submitted to *Computational Geosciences*. 2005.
- [86] Lien M., Berre I., and Mannseth T. 2005. Combined adaptive multiscale and level set parameter estimation. *preprint*
- [87] Litman A., Lesselier D., and Santosa D. 1998. Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set. *Inverse Problems* **14** 685–706
- [88] Litman A. 2005. Reconstruction by level sets of n -ary scattering obstacles. *Inverse Problems* **21** S131-S152
- [89] Liu N., and Oliver D. S. Ensemble Kalman filter for automatic history matching of geologic facies. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 47(3-4):147-161, 2005.
- [90] Liu N., and Oliver D. S. Critical evaluation of the ensemble Kalman filter on history matching of geologic facies. In *SPE Reservoir Simulation Symposium Houston, Texas, 31 January-2 February 2005*. SPE92867.

- [91] Masmoudi M., Pommier J., and Samet B. 2005. The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications. *Inverse Problems* **21** 547–64.
- [92] Merriman B., Caffisch R., and Osher S. 1999. Level set methods, with an application to modeling the growth of thin films. *Free Boundary Value Problems, Theory and Applications* eds. I. (Boca Raton: CRC Press) pp. 51-70
- [93] Mumford D., and Shah J. 1989. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.* **42** 577–685
- [94] Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media. (First ed.). *International series in physics*, McGraw-Hill Book Company Inc, New York, London (1937)
- [95] Nævdal G., Mannseth T., and Vefring E. H. Near- well reservoir monitoring through ensemble Kalman filter. In SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium, Tulsa, Oklahoma. April 2002. SPE 75235.
- [96] Nævdal G., Johnsen L. M., Aanonsen S. I., and Vefring E. H. Reservoir monitoring and continuous model updating using ensemble Kalman filter. SPE Journal, 66-74, March 2005.
- [97] Nakashima T., Arihara N. and Sato K. *Effective Permeability Estimation for Modeling Naturally Fractured Reservoirs*. SPE 68124.
- [98] Nakashima T., Arihara N., and Sutopo., Waseda University, and Sato K., SPE, The University of Tokyo. SPE 68124. Effective Permeability Estimation for Modeling Naturally Fractured Reservoirs.
- [99] Natterer F. 1986. *The Mathematics of Computerized Tomography* (Stuttgart: Teubner)
- [100] Natterer F., and Wübbeling F. 1995. A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography. *Inverse Problems* **11** 1225-32
- [101] Natterer F., and Wubbeling F. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Philadelphia. 2001.

- [102] Nelson R.A. Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs Fractured Reservoirs. 2nd Edition, 2001.
- [103] Nielsen L.K., Tai X.-C., Aanonsen S.I., and Espedal M., Reservoir Description Using a Binary Level Set Approach with Additional Prior Information About the Reservoir Model. Proc. CMA/CIPR conference on PDE-based Image Processing and Related Inverse Problems. Oslo 8-12 Aug. 2005.
- [104] Nielsen L.K., Tai X.-C., Aanonsen S.I., and Espedal M. 2005. A Binary Level Set Method for Elliptic Inverse Problems with Discontinuous Coefficients. Submitted to Inverse Problems.
- [105] Novotny A. A., Feijóo R. A., Taroco E., and Padra C. 2003. Topological sensitivity analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **192** 803–829.
- [106] Olea Ricardo A. 1999. Geostatistic for engineers and earth scientists. Kluwer Academic Plubishers. London.
- [107] Osher S., and Sethian J. A. 1988. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* **79** 12–49.
- [108] Osher S. and Santosa F. 2001. Level set methods for optimisation problems involving geometry and constraints I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *J. Comput. Phys.* **171** 272–88.
- [109] Osher S. and Fedkiw R. 2003. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. (New York: Springer).
- [110] Osher S. and Paragios N. 2003. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*. (Berlin: Springer).
- [111] . Penuela G., SPE, Civan F., SPE, Hughes R. G., SPE, and Wiggins M. L. SPE 75524. Time-Dependent Shape Factors for Interporosity Flow in Naturally Fractured Gas-Condensate Reservoirs. University of Oklahoma. 2002.
- [112] Penuela G., SPE, Hughes R. G., SPE, Civan F., SPE, and Wiggins M. L., SPE, the University of Oklahoma. SPE 75234. Time-Dependent Shape Factors for Secondary Recovery in Naturally Fractured Reservoirs.

- [113] Potthast R. 2006. A survey on sampling and probe methods for inverse problems. *Inverse Problems*. **22** R1-R47.
- [114] Rahon D., Blanc G., and Guerillot D., *Three-Dimensional Reservoir description from multiwell Pressure Data and Prior information*. 1996. SPE 36509.
- [115] Rahon D. *New- Gradient method using the description of the reservoir model in lithofacies*. 1996. SPE 36568.
- [116] Rahon D. et al, *Inversion of geological shape in reservoir engineering using well test and history matching of production data*. 1997. SPE 38658.
- [117] Rahon D. et al, *Identification of geological shapes in reservoir engineering by history matching production data*. SPE 48969. 1998.
- [118] Ramananjaona C., Lambert M., Lesselier D. and Zolésio J-P. 2001. Shape reconstruction of buried obstacles by controlled evolution of a level set: from a min-max formulation to numerical experimentation. *Inverse Problems*. **17** 1087–1111.
- [119] Ramananjaona C., Lambert M. and Lesselier D. 2001. Shape inversion from TM and TE real data by controlled evolution of level sets. *Inverse Problems* **17** 1585–95.
- [120] Ramananjaona C., Lambert M., and Lesselier D. 2003. On novel developments of controlled evolution of level sets in the field of inverse shape problems. *Radio Scie.* **38** doi:10.1029/2001RS002567
- [121] Sabatier P. C. 2000. Past and future of inverse problems. *J. Math. Phys.* **41** 4082–4124.
- [122] Sagar R.K., Kelkar M.G. and Thomson L.G. 1995. *Reservoir Description by Integrating Well-Test Data and Spatial Statistics*. SPEFE 267.
- [123] Santosa F. 1996. A level set approach for inverse problems involving obstacles. *ESAIM Control, Optim. Calculus Variations* **1** 17–33.
- [124] Schumacher A., Kobolev V. V., and Eschenauer H. A. 1994. Bubble method for topology and shape optimization of structures *J. Struct. Optim.* **8** 42–51.

- [125] Sethian J. A. 1999. *Level Set Methods and Fast Marching Methods* (2nd ed) (Cambridge: Cambridge Univ. Press).
- [126] Sethian J. A. 1999 Fast Marching Methods. *SIAM Review* **41** 199–235.
- [127] Sethian J. A., and Wiegmann A. 2000. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *J. Comput. Phys.* **163** 489–528.
- [128] Sokolowski J., and Zochowski A. 1999. On topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.* **37** 1251–72.
- [129] Sokolowski J., and Zochowski A. 1999. Topological derivatives for elliptic problems. *Inverse Problems* **15** 123–34.
- [130] Sokolowski J., and Zolésio J-P. 1992. *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*. (Springer series in Computational Mathematics Vol. 16) (Berlin: Springer).
- [131] Soleimani M., Lionheart W. R. B., and Dorn O. 2005. Level set reconstruction of conductivity and permittivity from boundary electrical measurements using experimental data. *Inverse Problems Scie. Engrg.* **14** 193-210.
- [132] Soleimani M., Dorn O., and Lionheart W. R. B. 2006. A narrowband level set method applied to EIT in brain for cryosurgery monitoring. *IEEE Trans. Biom. Eng., to appear*.
- [133] Souriau L., Duchêne B., Lesselier D., and Kleinman R. E. 1996. Modified gradient approach to inverse scattering for binary objects in stratified media. *Inverse Problems* **12** 463–81.
- [134] Strack O.D.L. 1998. Groundwater Mechanics. (First Ed.), Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [135] Tai X.-C., and Yao C., 2005. Fast Piecewise Constant Level Set Methods (PCLSM) with Newton Updating, submitted to IEEE Trans on Image Processing, CAM-report, CAM-05-51, UCLA.
- [136] Tai C., and Li H. 2005. Piecewise Constant Level Set Method for Interface Problems, paper presented at the International Conference on Free

Boundary Problems-Theory and Applications. 7-12 June 2005. Coimbra, Portugal.

- [137] Tai X.-C., and Li H. 2005. A Piecewise Constant Level Set Method for Elliptic Inverse Problems. *Applied Numerical Mathematics*, submitted.
- [138] Tai X.-C., and Chan T. F. 2004. A survey on multiple level set methods with applications for identifying piecewise constant functions *Int. J. Num. Analysis Modeling* **1** 25–47.
- [139] Tarokh A. 2005. Shape-Based Methods for Linear Inverse Problems. *Thesis*, Northeastern Univ. Dept. ECE, August 2005.
- [140] Uleberg and Kleppe J. 1996. Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Trondheim. Dual Porosity, Dual Permeability Formulation for Fractured Reservoir Simulation K.
- [141] Van den Doel K., and Ascher U., M. 2006. On level set regularization for highly ill-posed distributed parameter estimation problems *J. Comp. Phys.*, to appear.
- [142] Vese L. A., and Chan T. F. 2002. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford-Shah model. *Int. J. Comp. Vision* **50** 271–93.
- [143] Villegas R., Dorn O., Moscoso M., and Kindelan M. 2005. Shape reconstruction from two-phase incompressible flow data using level sets. *Proc. International conference on PDE-based image processing and related inverse problems*. CMA, Oslo: August 2005. pp. 381-401, Series: Mathematics and Visualization, Publisher: Springer, ISBN 078-3-540-33266-4.
- [144] Villegas R., Kindelan M., Dorn O., and Moscoso M. 2006. Sensitivity studies for shape reconstruction in reservoir characterization using level sets. *Proc. 3rd International Conference on Inverse Problems: Modeling and Simulation* (Fethiye, May).
- [145] Villegas R., Dorn O., Kindelan M., and Moscoso M. 2007. Imaging low sensitivity regions in petroleum reservoirs using topological perturbations and level sets. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2007.

- [146] Villegas R., Dorn O., Moscoso M., Kindelan M. and Mustieles F. J. 2006. Simultaneous characterization of geological shapes and permeability distributions in reservoirs using the level set method. *SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition*. (Vienna: June).
- [147] Villegas R., Dorn O., Moscoso M., and Kindelan M. 2006. Characterization of reservoirs by evolving level set functions obtained from geostatistics Proc. 14th European Conference on Mathematics for Industry (ECMI). 10-14 July 2006. Leganes, Spain. Publisher: Springer.
- [148] Villegas R., Dorn O., Moscoso M. and Kindelan M. 2007. Structural stochastic inversion for the history matching problem in reservoir characterization using the Level Set method. *Inverse Problems* (In preparation).
- [149] Vogel C. R. 2002. Computational Methods for Inverse Problems. (*SIAM series Frontiers in Applied Mathematics*). (Philadelphia: SIAM).
- [150] Wang M. Y., Wang X. and Guo D. 2003. A level set method for structural topology optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **192** 227–46.
- [151] Wang M. and Wang X. 2004. Color level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **193** 469–496.
- [152] Wen X.-H. and Chen W. H. 2005. Real-time reservoir model updating using ensemble Kalman filter. In SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, 31 January-2 February 2005. SPE92991.
- [153] Zacharopoulos A., Arridge S., Dorn O., Kolehmainen V., and Sikora J. 2006. 3D shape reconstruction in optical tomography using spherical harmonics and BEM, *Progress in Electromagnetics Research Symposium PIERS 2006* (Cambridge, March) 48–52. To appear also in *J. Electromagn. Waves Applic. (JEMWA) 2006*.
- [154] Zacharopoulos A., Arridge S., Dorn O., Kolehmainen V., and Sikora J. 2006. Three dimensional reconstruction of shape and piecewise constant region values for Optical Tomography using spherical harmonic parameterisation and a Boundary Element Method. *submitted*.

- [155] Zacharopoulos A., Arridge S., Dorn O. Kolehmainen V., and Sikora J. 2006. Reconstruction of simple geometric objects in 3D optical tomography using an adjoint technique and a Boundary Element Method. *in preparation*.
- [156] Zhao H-K., Chan T., Merriman B. and Osher S. 1996. A variational level set approach to multiphase motion. *J. Comput. Phys.* **127** 179–95.